MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM DUTOS DE PRODUÇÃO DE ÓLEO E GÁS NATURAL

JAIME NEIVA MIRANDA DE SOUZA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIA DE PROCESSOS QUÍMICOS E BIOQUÍMICOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS.

ESCOLA DE QUÍMICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

2010

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM DUTOS DE PRODUÇÃO DE ÓLEO E GÁS NATURAL

JAIME NEIVA MIRANDA DE SOUZA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIA DE PROCESSOS QUÍMICOS E BIOQUÍMICOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS.

Aprovada por:
Prof. José Luiz de Medeiros, D.Sc – Orientador/Presidente
Prof. André Luiz Hemerly Costa, D.Sc. – Orientador
Prof. Giovani Cavalcanti Nunes, Ph.D. – Orientador
Prof. Alexandre Rodrigues Tôrres, D.Sc.
Prof. Carlos Eduardo Fontes da Costa e Silva, D.Sc.
Prof. Heloísa Lajas Sanches, D.Sc.
Prof. Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva, D.Sc.
Prof Su Jian D Sc

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2010

Souza, Jaime Neiva Miranda de.

Modelagem e Simulação de Escoamento Multifásico em Dutos de Produção de Óleo e Gás Natural, Rio de Janeiro, 2010.

xxvi, 265 p.; Il.

Tese (Doutorado em Tecnologia de Processos Químicos e Bioquímicos) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Química, 2010.

Orientadores: José Luiz de Medeiros; André Luiz Hemerly Costa; Giovani Cavalcanti Nunes

- 1. Produção de Petróleo e Gás Natural; 2. Modelagem de Escoamento Multifásico; 3. Redes de Dutos; 4. Equações Diferenciais Parciais; 5. Método de Elementos Finitos.
- I. Medeiros, José Luiz de; Costa, André Luiz Hemerly; Nunes, Giovani Cavalcanti (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Tecnologia de Processos Químicos e Bioquímicos, Escola de Química. III. Título.

Dedico essa tese à minha esposa, Fabyana Freire Ventin, a quem infinitamente amo e admiro.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de ofertar meus agradecimentos a todos aqueles que muito contribuíram tecnicamente para a viabilização deste trabalho:

- Orientador Prof. José Luiz de Medeiros, pela imensurável transferência de conhecimento, pelo apoio profissional e pelos *insights* que permitiram a transposição de barreiras técnicas encontradas ao longo da exploração desse tema de tese;
- Orientador Prof. André Luiz Hemerly Costa, pelo incansável apoio no desenvolvimento científico do tema de tese, garantindo a máxima preocupação com a aplicação do método científico na formulação e solução dos problemas de interesse;
- Orientador Dr. Giovani Cavalcanti, pela capacidade ímpar de alinhamento entre pesquisa científica de alto nível e a aplicação prática na indústria de petróleo;
- Prof. Ofelia de Queiroz Fernandes Araujo, pelo importante apoio na minha formação acadêmica.

Agradeço à PETROBRAS, pelo incentivo e apoio financeiro, possibilitando o desenvolvimento desse trabalho em tempo parcial.

Agradeço à Chemtech Serviços de Engenharia e *Software* Ltda. que permitiu, durante os seis meses iniciais do meu curso de doutorado, o acúmulo das atividades de projeto na empresa e das atividades acadêmicas na UFRJ.

Além disso, agradeço sobretudo à minha esposa Fabyana Ventin por me apoiar nas difíceis decisões, por confiar na minha capacidade, por ter sempre paciência e compreensão e por ser extremamente carinhosa e amável, à minha mãe Vera Lucia por ministrar as infinitas lições essenciais para a fundação do meu caráter e, principalmente, por me mostrar como se deve lutar para realização de sonhos e à minha avó Maria Neiva por ser um exemplo de energia, força, dedicação e vontade em toda sua trajetória de vida.

Agredeço também àqueles que trago na memória por toda a vida como referências pessoais, meu avô Raimundo Nonato Trindade e meu pai Jorge Manuel Miranda de Souza.

RESUMO

Souza, Jaime Neiva Miranda de. **Modelagem e Simulação de Escoamento Multifásico em Dutos de Produção de Óleo e Gás Natural**. Orientadores: José Luiz de Medeiros; André Luiz Hemerly Costa; Giovani Cavalcanti Nunes; Rio de Janeiro: UFRJ/EQ, 2010. Tese (Doutor em Ciências).

Ferramentas computacionais de simulação de escoamento multifásico em dutos de produção de petróleo são de grande importância para o estudo detalhado das tecnologias de elevação de petróleo, componente fundamental para determinação da viabilidade econômica da produção em campos de óleos pesados. Algumas ferramentas comerciais são disponíveis, porém por um custo elevado e muitas vezes utilizando uma arquitetura fechada que, em muitos casos, é incapaz de descrever o comportamento do petróleo brasileiro e a elevada profundidade dos poços nacionais.

A literatura descreve modelos dinâmicos de escoamento bifásico em um único duto e válidos apenas para determinados regimes de escoamento. Verifica-se a falta de trabalhos na literatura aberta que possibilitem a simulação do escoamento de gás e líquido ao longo de uma rede de dutos capaz de interligar diversos pontos de fornecimento e consumo, inclusive com a presença de elementos modificadores de pressão, como válvulas e bombas. Essa tese propõe, então, modelos dinâmicos de escoamento monofásico e bifásico aplicados a redes de dutos para produção de óleo e gás.

Motivada pela utilização desses modelos em casos práticos da indústria de petróleo, essa tese apresenta um arcabouço para a análise de sistemas de elevação artificial por *gas lift* contínuo usando um algoritmo de otimização acoplado a um modelo estacionário de redes de escoamento bifásico com qualquer topologia obtido a partir da simplificação de um modelo dinâmico bifásico.

Os métodos numéricos para solução do sistema de equações diferenciais parciais são apresentados ao longo do trabalho, onde todos os modelos foram implementados através de uma formulação totalmente matricial.

Diversos estudos de caso descrevem a aplicação da metodologia em problemas típicos da indústria de produção de petróleo.

ABSTRACT

Souza, Jaime Neiva Miranda de. Modeling and Simulation of Multiphase Flow in Pipes for Oil and Natural Gas Production. Advisors: José Luiz de Medeiros; André Luiz Hemerly Costa; Giovani Cavalcanti Nunes; Rio de Janeiro: UFRJ/EQ, 2010. Thesis (Doctor em Science).

Computational tools for multiphase flow simulation in petroleum production pipelines are extremely important for the detailed study of petroleum elevation technologies, a fundamental component for the economical analysis of petroleum reservoirs in heavy oil fields. Some commercial tools are available, nevertheless with a high cost and mostly with a closed architecture that, in many cases, is not capable of describing the behavior of Brazilian crudes and the ultra deep water wells.

The literature describes dynamic models for two-phase flow in a single pipe and valids only for certain flow regimes. It is verified a lack of works in the open literature that possibilitate the simulation of gas and liquid flow along a pipe network for the connection of source and sink points, dopted of pressure modification devices, like valves and pumps. Thus, this thesis proposes dynamic models for one or more phases in pipe netwoks for gas and oil prodution.

Motivated by the utilization of these models in practical cases of the petroleum industry, this thesis presents a framework for the analysis of artificial elevation systems by continuum gas lift using an optimization algorithm coupled to a stationary model for two-phase flow pipe networks with any network topology obtained from a simplification of the dynamic two phase flow model.

Numerical methods for the solution of the partial differential equations are presented along this work, where all the models were implemented using a matrix based formulation.

Several case studies describe the application of the methodology in typical problems of the petroleum production industry.

SUMÁRIO

1	Introdução		1
	1.1	Produção de Petróleo	1
	1.2	Tecnologias de Elevação do Petróleo	2
	1.3	Ferramentas Comerciais	3
	1.4	Motivação	3
2	O	bjetivo	4
	2.1	Inovações e Contribuições	4
	2.2	Organização da Tese	5
3	R	evisão Bibliográfica	8
	3.1	Introdução	8
	3.2	Classificação das Abordagens para Escoamento Multifásico	10
	3.3	Evolução dos Modelos Bifásicos Estacionários	10
	3.	3.1 Modelos Empíricos	11
	3.	3.2 Modelos Fenomenológicos	12
	3.4	Identificação de Padrão de Escoamento	15
	3.5	EvoluçÃo dos Modelos Bifásicos Dinâmicos	15
	3.6	Avaliação dos Modelos Dinâmicos	17
	3.7	Métodos Numéricos	18
	3.8	Abordagem Segundo Redes de Escoamento	19
	3.9	Softwares Comerciais	20
	3.	9.1 OLGA	20
	3.	9.2 TACITE	21
	3.10	Produção de Petróleo e Gás Natural	22
	3.11	Visão Geral	23
4	M	Iodelagem de Escoamento Monofásico	25
	4.1	Introdução	25
	4.2	Notações Básicas	26
	4.3	Equações de Balanço de Massa	26
	4.4	Equações de Balanço de Momento	27
	4.5	Sistema de Equações	28
5	M	Iodelagem de Escoamento Bifásico: Abordagem Via 4 Equações	30
	5.1	Introdução	30

5.2	Definiçõe	es Iniciais	. 31
5.3	Notações	Básicas	. 33
5.4	Análise I	Diferencial do Balanço de Massa por Fase	. 34
5.5	Análise I	Diferencial do Balanço de Momento por Fase	. 34
5.6	Sistema d	le Equações	. 36
5.7	Equações	de Estado	. 40
5.8	Fechame	nto do Modelo	. 41
5.9	Fechame	nto para Padrão Estratificado	. 42
5.	.9.1	Geometria para padrão estratificado	. 42
5.	.9.2	Termos dissipativos	. 44
5.	.9.3	Termos de correção da pressão	. 48
5.10	Fechame	nto para Padrão Anular	. 53
5.	.10.1	Geometria para padrão anular	. 53
5.	.10.2	Termos dissipativos	. 54
5.	.10.3	Termo de correção de pressão	. 55
5.11	Fechame	nto para Padrão Bolhas	. 55
5.	.11.1	Geometria para padrão bolhas:	. 55
5.	.11.2	Termos dissipativos	. 56
5.	.11.3	Termos de correção da pressão	. 57
5.12	Fechame	nto para Padrão Intermitente	. 58
5.	.12.1	Geometria para regime intermitente:	. 58
5.	.12.2	Velocidade translacional do slug	. 60
5.	.12.3	Comprimento do slug	. 60
5.	.12.4	Fração de área de gás no slug e na bolha de Taylor	. 61
5.	.12.5	Velocidades locais	. 62
5.	.12.6	Comprimento da unidade de slug	. 62
5.	.12.7	Termos dissipativos e de correção de pressão	. 63
5.13	Identifica	ção do Padrão de Escoamento	. 63
5.	.13.1	Análise de estabilidade do escoamento estratificado	. 65
5.	.13.2	Análise de estabilidade do escoamento anular	. 67
5.	.13.3	Análise de estabilidade entre bolhas e intermitente	. 68
5.	.13.4	Algoritmo para determinação do padrão de escoamento	. 69
5.14	Análise d	lo Modelo	. 72
5.	.14.1	Não-linearidade do modelo	. 72

	5.	14.2	Hiperbolicidade	75
	5.	.14.3	Frações de área de gás extremas	77
6	N.	Iodelagem	de Escoamento Bifásico: Abordagem Via 3 Equações	80
	6.1	Introduçã	ĭo	80
	6.2	Sistema o	de Equações	81
7	N	Iétodos Nu	ıméricos para Solução das EDP's	85
	7.1	Introduçã	ĭo	85
	7.2	Métodos	dos Resíduos Ponderados	86
	7.3	Método d	los Elementos Finitos	88
	7.4	Método d	de Galerkin em Elementos Finitos	96
	7.5	Método d	de Petrov-Galerkin em Elementos Finitos	100
	7.6	Método d	de Diferenças Finitas	103
	7.	6.1	Aproximação via diferenças centrais	104
	7.	.6.2	Aproximação upwind	106
8	A	valiações o	e Comparações	109
	8.1	Validação	o dos Métodos Numéricos	109
	8.	1.1	Modelo invíscido de Burgers	109
	8.	.1.2	Modelo de águas rasas	112
	8.2	Verificaç	ão do Modelo Estacionário	115
	8.3	Determin	nação do Mapa de Padrões de Escoamento	117
9	N	Iodelagem	Dinâmica de Redes de Escoamento Bifásico	121
	9.1	Introduçã	ĭo	121
	9.2	Vértice D	Dinâmico	122
	9.	2.1	Especificações simples	125
	9.	.2.2	Especificações de válvula de retenção	125
	9.3	Vértice E	Estático	126
	9.	.3.1	Especificações simples	126
	9.	.3.2	Especificações de reservatório	126
	9.	.3.3	Especificações de válvula	128
	9.4	Conexõe	s entre Vértices	129
	9.5	Aresta 1	30	
	9.6	Sistema o	de Equações da Rede	131
	9.7	Software	de Simulação Dinâmica de Redes Bifásicas	133
10) R	esultados o	de Simulações Dinâmicas	142

	10.1 Duto Si	mples	142
	10.1.1	Escoamento horizontal estratificado	142
	10.1.2	Escoamento horizontal anular	149
	10.1.3	Escoamento horizontal padrão bolhas	152
	10.1.4	Escoamento horizontal via modelo a 3 equações	154
	10.2 Redes d	le Dutos	155
	10.2.1	Dois trechos de dutos em série	155
	10.2.2	Rede com ciclo	159
	10.3 Elevaçã	io de Petróleo	163
	10.3.1	Poço simples	164
	10.3.2	Poço com gas lift	167
	10.3.3	Poço offshore	175
11	Modelager	m Estacionária Simplificada de Redes de Escoamento Bifásico	182
	11.1 Introduc	ção	182
	11.2 Definiç	ões	182
	11.3 Notação	o Matricial	184
	11.4 Modelo	Não-Linear	185
	11.5 Modelo	Linear	188
	11.6 Determ	inação do Gradiente de Pressão	191
12	Otimização	o de Sistemas de Gas lift Contínuo	193
	12.1 Introduc	ção	193
	12.2 Formula	ação do Problema	194
	12.3 Estimat	iva de Investimento Com o Compressor	196
	12.4 Estimat	iva do Investimento Com a Turbina	196
	12.5 Estimat	iva do Custo de Capital das Linhas de Gás	197
	12.6 Receita	e Custos Operacionais	197
13	Resultados	s de Simulação e Otimização de Sistemas de <i>Gas lift</i> Contínuo	199
	13.1 Caso 1	- Poço Onshore	199
	13.1.1	Simulação	200
	13.2 Caso 2	- Poço Offshore	201
	13.2.1	Simulação	204
	13.2.2	Máxima produção	206
	13.2.3	Máxima produção considerando o índice de produção	207
	13.2.4	Máximo lucro	208

13.3 Caso 3 - Rede Tipo Árvore com Múltiplos Poços <i>Offshore</i>	209
13.3.1 Simulação	211
13.3.2 Máxima produção para diferentes pressões de reservatório	212
13.3.3 Máxima produção com restrições na disponibilidade de gás	213
13.3.4 Projeto ótimo	214
13.4 Caso 4 - Rede Cíclica com Múltiplos Poços Offshore	216
13.4.1 Valores e perfis	219
13.4.2 Curvas de pressão	222
14 Conclusões	224
Referências Bibliográficas	229
Apêndice I – Notação Matemática	240
Vetores e Matrizes	240
Transformações e Operações especiais	241
Apêndice II – Determinação dos Centros de Massa para Escoamento Estratificado	242
Apêndice III – Integração das Matrizes do Método de Galerkin	244
Introdução 244	
Para Método de Galerkin	245
Para Método de Petrov-Galerkin	245
Apêndice IV – Propriedades das Funções Base e Peso para Método de Galerkin	247
Apêndice V – Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976)	249
Introdução 249	
Relações Geométricas	249
Balanços de Momento em Cada Fase	252
Equação Taitel-Dukler	255
Apêndice VI – Modelo Estacionário Anular de Pots (1985)	258
Apêndice VII – Modelo Beggs e Brill (1973)	260
Introdução 260	
Cálculos Iniciais	261
Determinação do Padrão de Escoamento Horizontal	262
Hold-up de Líquido para Linha Horizontal	262
Fator de Correção de Inclinação	263
Hold-up de Líquido	263
Densidade da Mistura e Tensão de Cisalhamento Bifásico	264

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1. Padrões de escoamento bifásico em dutos horizontais	8
Figura 4.1. Volume de controle	26
Figura 5.1. Volume de controle	33
Figura 5.2. Geometria do escoamento estratificado	42
Figura 5.3. Ângulo de contato, altura máxima da camada de líquido e frações de área de	gás e
líquido	43
Figura 5.4. Perímetros de contato	43
Figura 5.5. Fatores de atrito de Fanning	46
Figura 5.6. Comparação entre as correlações	46
Figura 5.7. Razão entre fatores de atrito de interface e da fase gás para escoar	mento
estratificado	48
Figura 5.8. Referencial para determinação da diferença de pressão no escoar	mento
estratificado	49
Figura 5.9. Cota do centro de massa das fases em relação ao ponto inferior da	seção
transversal do tubo	50
Figura 5.10. Diferença de pressão da fase líquida (adimensional)	51
Figura 5.11. Diferença de pressão da fase gás (adimensional)	51
Figura 5.12. Geometria do escoamento anular	53
Figura 5.13. Fração de área de gás para escoamento anular	54
Figura 5.14. Razão entre fatores de atrito de interface e da fase gás para escoamento anul	lar 55
Figura 5.15. Geometria do padrão bolhas	55
Figura 5.16. Geometria do escoamento intermitente com filme estratificado	58
Figura 5.17. Lógica de identificação de padrão de escoamento	70
Figura 5.18. Coeficientes para as EDPs de fração de área de gás e de pressão	72
Figura 5.19. Coeficientes para a EDP de vazão mássica de líquido	73
Figura 5.20. Coeficientes para a EDP de vazão mássica de gás	74
Figura 5.21. Autovalores em função da fração de área de gás	75
Figura 5.22. Regiões de hiperbolicidade para regime estratificado	76
Figura 7.1. Função base triangular	90
Figura 7.2. Aproximação para 3 e 5 elementos finitos	90
Figura 7.3. Funções base e peso para o método de <i>Petrov-Galerkin</i>	101
Figura 8.1. Burgers utilizando diferencas finitas <i>upwind</i>	110

Figura 8.2. Burgers utilizando <i>Petrov-Galerkin</i> ($\alpha = 0.1$)	111
Figura 8.3. Burgers utilizando <i>Petrov-Galerkin</i> ($\alpha = 0.3$)	111
Figura 8.4. Burgers utilizando <i>Petrov-Galerkin</i> ($\alpha = 0.5$)	111
Figura 8.5. Burgers utilizando <i>Petrov-Galerkin</i> ($\alpha = 1.0$)	112
Figura 8.6. Solução analítica para o problema de quebra de comporta	114
Figura 8.7. Solução numérica via Galerkin para o problema de quebra de comporta	114
Figura 8.8. Solução Numérica via diferenças finitas centrais para o problema de o	juebra de
comporta	114
Figura 8.9. Comparação entre modelos estacionários estratificados horizontais ($\theta = 0$	°) 116
Figura 8.10. Comparação entre modelos estacionários estratificados ascendentes (θ	= + 0.5°)
	117
Figura 8.11. Comparação entre modelos estacionários estratificados descendentes (θ	= - 0.5°)
	117
Figura 8.12. Escoamento horizontal	118
Figura 8.13. Escoamento inclinado ascendente (+0.5°)	118
Figura 8.14. Escoamento inclinado ascendente (+5°)	118
Figura 8.15. Escoamento inclinado ascendente (+50°)	119
Figura 8.16. Escoamento vertical ascendente (+90°)	119
Figura 8.17. Escoamento inclinado descendente (-5°)	119
Figura 8.18. Escoamento inclinado descendente (-50°)	120
Figura 8.19. Escoamento inclinado descendente (-90°)	120
Figura 9.1. Exemplo de digrafo	122
Figura 9.2. Representação esquemática de uma conexão	129
Figura 9.3. Tela Inicial do Simulador	134
Figura 9.4. Tela de configuração dos métodos numéricos	134
Figura 9.5. Tela de configuração dos fluidos	135
Figura 9.6. Tela de configuração dos vértices	135
Figura 9.7. Tela de configuração das arestas	135
Figura 9.8. Tela de configuração das especificações do tipo válvula	136
Figura 9.9. Tela de configuração das especificações do tipo válvula de retenção	136
Figura 9.10. Tela de configuração de especificações do tipo reservatório	136
Figura 9.11. Tela de configuração de acoplamentos entre vértices	137
Figura 9.12. Tela de visualização de resultados	137
Figura 9.13. Organização do simulador	141

Figura	10.1. Indicação do padrão estratificado para a condição inicial da simulação	143
Figura	10.2. Condições iniciais para simulação de escoamento horizontal estratificado	143
Figura	10.3. Resultados para simulação escoamento horizontal em regime estratificado	144
Figura	10.4. Análise de sensibilidade de malha (caso estratificado) via método de Galen	rkin
		145
Figura	10.5. Análise de sensibilidade de malha (caso estratificado) via método de diferen	ıças
fin	iitas	146
Figura	10.6. Comparação entre métodos de <i>Galerkin</i> e de diferenças finitas	146
Figura	10.7. Análise para 3 condições de contorno <i>Dirichlet</i> e 1 condição de contorno	von
Ne	rumann	148
Figura	10.8. Análise para 3 condições de contorno Dirichlet e nenhuma condição de conto	rno
vo	n Neumann	148
Figura	10.9. Indicação do padrão anular para a condição inicial da simulação	149
Figura	10.10. Condições iniciais para simulação de escoamento horizontal anular	150
Figura	10.11. Resultados para simulação de escoamento horizontal em regime anular	150
Figura	10.12. Análise de sensibilidade de malha (caso anular)	151
Figura	10.13. Análise de sensibilidade de malha (caso anular)	152
Figura	10.14. Indicação do padrão bolhas para a condição inicial da simulação	152
Figura	10.15. Condições iniciais para simulação de escoamento horizontal regime bolhas .	153
Figura	10.16. Resultados para simulação de escoamento horizontal em regime bolhas	154
Figura	10.17. Resultados para simulação através do modelo a 3 equações	155
Figura	10.18. Representação de rede simples para formulação A	156
Figura	10.19. Representação de rede simples para formulação B	156
Figura	10.20. Resultados para dois trechos em série: fração de área de gás	157
Figura	10.21. Resultados para dois trechos em série: pressão	157
Figura	10.22. Resultados para dois trechos em série: vazão de líquido	157
Figura	10.23. Resultados para dois trechos em série: vazão de gás	158
Figura	10.24. Diferença entre vazão de entrada e vazão de saída no vértice de acoplame	nto
		159
Figura	10.25. Representação de rede com ciclo	160
Figura	10.26. Resultados para rede de dutos: tubulação 1	161
Figura	10.27. Resultados para rede de dutos: tubulação 2	161
Figura	10.28. Resultados para rede de dutos: tubulação 3	162
Figura	10.29. Resultados para rede de dutos: tubulação 4	162

Figura	10.30.	Resultados para rede de dutos: tubulação 5	163
Figura	10.31.	Representação do poço simples	164
Figura	10.32.	Variáveis do trecho de tubulação para simulação do poço simples	165
Figura	10.33.	Variáveis da válvula para simulação do poço simples	166
Figura	10.34.	Variáveis do reservatório para simulação do poço simples	166
Figura	10.35.	Representação do poço com gas lift	168
Figura	10.36.	Variáveis do reservatório para simulação do poço com gas lift	169
Figura	10.37.	Variáveis do poço para simulação do poço com gas lift	170
Figura	10.38.	Variáveis da aresta de gás a montante da <i>choke</i> para simulação do poço com	gas
lift	t		170
Figura	10.39.	Variáveis da aresta de gás a jusante da <i>choke</i> para simulação do poço com	gas
lift	t		171
Figura	10.40.	Variáveis da <i>choke</i> de gás para simulação do poço com <i>gas lift</i>	171
Figura	10.41.	Variáveis do reservatório	172
Figura	10.42.	Variáveis do poço para simulação do poço com gas lift	172
Figura	10.43.	Variáveis da aresta de gás a montante da <i>choke</i> para simulação do poço com	gas
lift	<u>,</u>		173
Figura	10.44.	Variáveis da aresta de gás a jusante da <i>choke</i> para simulação do poço com	gas
lift	<u>,</u>		173
Figura	10.45.	Variáveis da válvula <i>choke</i> de gás para simulação do poço com <i>gas lift</i>	174
Figura	10.46.	Variáveis da válvula de gas lift para simulação do poço com gas lift	175
Figura	10.47.	Representação do sistema de produção offshore	177
Figura	10.48.	Variáveis do reservatório para simulação do poço offshore	178
Figura	10.49.	Variáveis do poço para simulação do poço offshore	178
Figura	10.50.	Variáveis da linha de produção para simulação do poço offshore	179
Figura	10.51.	Variáveis do riser de óleo para simulação do poço offshore	179
Figura	10.52.	Variáveis da linha de gás a montante da choke para simulação do poço offsh	iore
••••			180
Figura	10.53	. Variáveis da linha de gás a jusante da <i>choke</i> para simulação do poço <i>offsh</i>	iore
			180
Figura	10.54.	Variáveis do anular de gás para simulação do poço offshore	180
Figura	10.55.	Variáveis do <i>choke</i> de gás para simulação do poço <i>offshore</i>	181
Figura	10.56.	Variáveis da válvula de gás lift para simulação do poço offshore	181
Figura	131 (Caso 1 - Representação esquemática	200

Figura 13.2. Caso 1 - Curvas de nível da pressão no downhole
Figura 13.4. Caso 2 - Digrafo da rede
Figura 13.5. Digrafo do poço
Figura 13.6. Caso 2 - Curvas de nível para pressão na base do poço (downhole)
Figura 13.7. Caso 2 - Curvas de nível da pressão na entrada da linha de gás (linha de 2 in) 205 Figura 13.8. Caso 2 - Curvas de nível da pressão na entrada da linha de gás (linha de 3 in) 206 Figura 13.9. Caso 2 - Máxima produção para diferentes pressões de downhole
Figura 13.8. Caso 2 - Curvas de nível da pressão na entrada da linha de gás (linha de 3 in) 206 Figura 13.9. Caso 2 - Máxima produção para diferentes pressões de downhole
Figura 13.9. Caso 2 - Máxima produção para diferentes pressões de downhole
Figura 13.10. Localização dos pontos de máximo para diferentes pressões de downhole 207 Figura 13.11. Máxima produção para diferentes índices de produção 207 Figura 13.12. Máximo lucro para diferentes cenários de preços de óleo 208 Figura 13.13. Caso 3 - Projeção isométrica simplificada 209 Figura 13.14. Caso 3 - Digrafo da rede de escoamento 209 Figura 13.15. Caso 3 - Curvas de nível da pressão no downhole (vértices 7 e 13) 212 Figura 13.16. Caso 3 - Curvas de nível da pressão no downhole (vértices 19 e 25) 212 Figura 13.17. Caso 3- Influência da disponibilidade de gás 214 Figura 13.18. Caso 4 - Projeção isométrica simplificada 217 Figura 13.19. Caso 4 - Digrafo da rede de escoamento 217 Figura 13.20. Caso 4 - Resultados para as variáveis de aresta 220 Figura 13.21. Caso 4 - Resultados para as variáveis de vértice 221 Figura 13.22. Caso 4 - Perfil de pressão ao longo do riser 221 Figura 13.23. Caso 4 - Perfil de pressão nos poços 222 Figura 13.24. Caso 4 - Perfil de pressão no transporte de gás entre a plataforma e o poço 222 Figura 13.25. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 1 222 Figura 13.26. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 2 Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 2
Figura 13.11. Máxima produção para diferentes índices de produção
Figura 13.12. Máximo lucro para diferentes cenários de preços de óleo
Figura 13.13. Caso 3 - Projeção isométrica simplificada
Figura 13.14. Caso 3 - Digrafo da rede de escoamento
Figura 13.15. Caso 3 - Curvas de nível da pressão no downhole (vértices 7 e 13)
Figura 13.16. Caso 3 - Curvas de nível da pressão no downhole (vértices 19 e 25)
Figura 13.17. Caso 3- Influência da disponibilidade de gás
Figura 13.18. Caso 4 - Projeção isométrica simplificada
Figura 13.19. Caso 4 - Digrafo da rede de escoamento
Figura 13.19. Caso 4 - Digrafo da rede de escoamento
Figura 13.21. Caso 4 - Resultados para as variáveis de vértice
Figura 13.22. Caso 4 - Perfil de pressão ao longo do <i>riser</i>
Figura 13.23. Caso 4 - Perfil de pressão nos poços
Figura 13.23. Caso 4 - Perfil de pressão nos poços
Figura 13.25. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 1 222 Figura 13.26. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 2 223 Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 3
Figura 13.26. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 2 223 Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 3
Figura 13.26. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 2 223 Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 3
Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 3
Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no <i>downhole</i> e na entrada de gás - poço 3
Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 3
Figura 13.28. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 4
11gura 13.20. Caso 4 - Carvas de inver da pressão no aovintore e na entrada de gas - poço 4

LISTA DE TABELAS

Tabela 10.1. Comparação entre tempos computacionais	147
Tabela 10.2. Comparação entre tempos computacionais	158
Tabela 10.3. Verificação do fechamento do balanço de massa	159
Tabela 10.4. Propriedades dos fluidos	163
Tabela 13.1. Caso 1 - Descrição das arestas	200
Tabela 13.2. Caso 2 - Descrição das arestas da rede	203
Tabela 13.3. Caso 2 - Perfil da aresta 2	203
Tabela 13.4. Caso 2 - Perfil da aresta 8	203
Tabela 13.5. Caso 2 - Descrição dos vértices	204
Tabela 13.6. Caso 2 - Especificações	204
Tabela 13.7. Resultados para busca do máximo lucro	208
Tabela 13.8. Caso 3 - Descrição das arestas	210
Tabela 13.9. Caso 3 - Perfil da linha 2	210
Tabela 13.10. Caso 3 - Perfis das arestas 8 e 14	210
Tabela 13.11. Caso 3 - Perfis das arestas 20 e 26	210
Tabela 13.12. Caso 3 - Descrição dos vértices	211
Tabela 13.13. Caso 3 - Especificações nodais	211
Tabela 13.14. Caso 3 - Máxima produção para pressão de reservatório de 220 bar	212
Tabela 13.15. Caso 3 - Máxima produção para pressão de reservatório de 240 bar	213
Tabela 13.16. Caso 3 - Parâmetros de projeto	215
Tabela 13.17. Caso 3 - Variáveis de decisão para projeto ótimo	215
Tabela 13.18. Caso 3 - Resultados para projeto compressor, linhas de gás e turbina	216
Tabela 13.19. Caso 3 - Resultados do projeto ótimo	216
Tabela 13.20. Caso 4 - Descrição das arestas	218
Tabela 13.21. Caso 4 - Perfil da aresta 4.	218
Tabela 13.22. Caso 4 - Perfis das arestas 11, 17, 23 e 29	218
Tabela 13.23. Caso 4 - Descrição dos vértices	219
Tabela 13.24. Caso 4 - Especificações nodais	219
Tabela A5.1. Constantes para expressões de fatores de atrito em escoamento bifásico	254
Tabela A7.1. Coeficientes para cálculo de <i>hold-up</i>	263
Tabela A7.2. Coeficientes para a correção da inclinação	263

LISTA DE SIGLAS

EM PORTUGUÊS

AN Padrão de Escoamento Anular
BO Padrão de Escoamento Bolhas
ES Padrão de Escoamento Anular
EDO Equação Diferencial Ordinária

EDP Equação Diferencial Parcial

ESO Padrão de Escoamento Estratificado com Ondas

ESS Padrão de Escoamento Estratificado Suave

IFP Instituto Francês de Petróleo

IN Padrão de Escoamento Intermitente

IS Intermitência Severa

EM INGLÊS

AUSM Advection Upwind Splitting Methods

BDF Backward Differentiation Formula

CAU Consistent Approximation Upwind

CFD Computational Fluidynamics

DC Discontinuity Capturing

DFM Drift-Flux Model

FDS Flux Difference Splitting

FLIC Flux-Limiter Centred

FORCE First-Order Centred

FVS Flux Vector Splitting

GGLS Galerkin Gradient Least-Square

GLS Galerkin Least-Square

HEM Homogeous Equilibrium Model

HLFLW Hybrid Lax-Friedrichs-Lax-Wendroff

IFE Institute for Energy Technology

IMF Implicid Multi-Field Algorithms

IPSA Inter-Phase Slip Algorithm

ISBL Inside Battery Limits

LOCA Loss-of-Coolant Accident

MUSCL Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws

NDF Numerical Differentiation Formula

NPW No-Pressure Wave Model

OSBL Outside Battery Limits

SQP Sequencial Quadratic Programming

STGLS Space-Time Galerkin Least-Square

SUPG Stream Upwind Petrov-Galerkin

TFM Two-Fluid Model

NOMENCLATURA

LETRAS LATINAS

a	Coeficiente para cálculo do fator de atrito [-]		
a	Coeficiente para cálculo do hold-up horizontal (modelo Beggs e Brill)		
A	Área da seção transversal do duto [m²]		
A	Matriz de coeficientes do modelo a 3 equações		
A	Matriz de coeficientes do modelo estacionário simplificado linear		
A	Custo anualizado [10 ⁶ dólares/ano]		
b	Coeficiente para cálculo do fator de atrito [-]		
b	Coeficiente para cálculo do hold-up horizontal (modelo Beggs e Brill)		
B	Matriz de coeficientes do modelo a 3 equações		
c	Compressibilidade da fase [kg/(m³·Pa)]		
c	Coeficiente para cálculo do hold-up horizontal (modelo Beggs e Brill)		
C	Coeficiente para cálculo do fator de atrito [-]		
C	Coeficiente para determinação da velocidade translactional do slug [-]		
C	Matriz de coeficientes do modelo a 3 equações		
C	Vetor de condições de contorno do tipo Dirichlet		
C	Vetor de termos não-homogêneos do modelo estacionário simplificado linear		
C	Custo [10 ⁶ dólares]		
CCF	Fator de anualização [ano ⁻¹]		
C_D	Coeficiente de arraste [-]		
c_G	Custo específico do gás combustível [dólares/Nm³]		
c_L	Preço do petróleo [dólares/barril]		
C_V	Coeficiente da válvula [GPM]		
D	Diâmetro interno do duto [m]		
d	Coeficiente para cálculo do fator de inclinação (modelo Beggs e Brill)		
d_b	Diâmetro de bolha [m]		
D_P	Derivada da quantidade de movimento da mistura em relação à pressão, [m]		
e	Coeficiente para cálculo do fator de inclinação (modelo Beggs e Brill)		

E	Vetor de especificações dos vértices		
f	Fator de atrito de Fanning [-]		
f	Coeficiente para cálculo do fator de inclinação (modelo Beggs e Brill)		
fl	Função indicadora de padrão de escoamento [-]		
g	Aceleração da gravidade [m/s²], 9.81 m/s²		
g	Coeficiente para cálculo do fator de inclinação (modelo Beggs e Brill)		
h	Tamanho do elemento finito [m]		
H	Hold-up do vértice [-]		
h_L	Altura do filme líquido [m]		
IP	Índice de produção de líquido ou de gás [(kg/s)/bar]		
k	Parâmetro da função suavizadora [-]		
K	Perímetro interno do duto [m]		
K	Variável adimensional de determinação do padrão de escoamento [-]		
l	Comprimento da região de filme ou de <i>slug</i> [m], (modelo de fechamento do padrão intermitente)		
L	Comprimento do tubo [m]		
L	Variável para IPE (modelo Beggs e Brill)		
LB	Vetor de limites inferiores para as variáveis de decisão		
m	Função indicadora de fase [-]		
m	Número de dutos		
M	Matriz ou vetor de coeficientes do modelo de escoamento		
M	Matriz de incidência		
MW	Peso molecular [kg/kmol]		
n	Coeficiente para cálculo do fator de atrito [-]		
n	Expoente para determinação da frequência dos slugs [-]		
N	Número de elementos finitos		
n_A	Número de vértices do tipo A		
n_B	Número de vértices do tipo B		
Ndir	Número de condições de contorno do tipo Dirichlet		
ne	Número de estados do modelo [-]		
Nneu	Número de condições de contorno do tipo von Neumann		

p	Termo do modelo de vértice dinâmico [Pa]			
p	Pressão a montante ou a jusante da válvula [bar]			
P	Pressão [Pa]			
P_T	Pressão adimensional [-]			
q	Vazão mássica [kg/s]			
Q	Vazão interna que chega ou sai do vértice [kg/s]			
Q	Vazão mássica referente ao poço de petróleo [kg/s]			
r	Termo relacionada à compressibilidade das fases [-]			
R	Receita [10 ⁶ dólares/ano]			
R	Constante universal dos gases [kJ/kmol·K], 8.314 kJ/kmol·K			
R	Raio interno do tubo [m]			
Reg	Variável de indicação de padrão de escoamento [-]			
S	Variável do modelo de Burgers			
S	Variável do modelo de águas rasas			
S_W	Matriz de seleção de estados reduzidos do duto			
t	Tempo [s]			
T	Variável adimensional de determinação do padrão de escoamento [-]			
и	Velocidade local [m/s], (modelo de fechamento do padrão intermitente)			
и	Vetor de variáveis de decisão			
UB	Vetor de limites superiores para as variáveis de decisão			
v	Velocidade média [m/s]			
V	Volume [m³]			
W	Potência de máquina [kW]			
W	Vetor de estados nodais reduzidos do duto			
W	Vazão externa que entra no vértice [kg/s]			
X	Coordenada axial do tubo [m]			
X	Vetor de coordenadas espaciais [m]			
X	Abertura da válvula [-]			
у	Vetor de estados do modelo de escoamento			
у	Vetor de variáveis do modelo estacionário simplificado			

	Y	Vetor de estados nodais do duto	
	Z	Cota do vértice da rede [m]	
	ZCM	Cota do centro de massa das fases [m]	
LETRAS GREGAS			
	α	Fração de área de seção transversal do duto [-]	
	β	Ângulo de molhamento do padrão estratificado [rad]	
	γ	Coeficiente politrópico [-]	
	Γ	Termo dissipativo [kg/s²]	
	δ	Espessura da interface [m]	
	ε	Rugosidade da parede interna do tubo [m]	
	η	Eficiência [-]	
	η	Coordenadas da quadratura gaussiana	
	θ	Ângulo de inclinação do tubo [rad], valor negativo indica tubo descendente e valor positivo tubo ascendente	
	θ	Coordenada relativa do nó	
	Θ	Matriz de massa do sistema de equações diferenciais após discretização	
	Λ	Matriz de coeficientes do sistema de equações diferenciais após discretização	
	λ	Hold-up para não-escorregamento [-]	
	μ	Viscosidade dinâmica [Pa·s]	
	ζ	Coeficiente para determinação da diferença de pressão para padrão bolhas [-]	
	ξ	Coordenada genérica [-]	
	Ξ	Vetor de coeficientes do sistema de equações diferenciais após discretização	
	ρ	Densidade da fase [kg/m³]	
	σ	Tensão interfacial [Pa·m]	
	τ	Tensão de cisalhamento [(kg/s²)/m]	
	τ	Tempo de residência [s]	
	ϕ	Função base	

Função de ponderação

 ψ Pesos da quadratura gaussiana

ψ Fator de correlação de inclinação (modelo Beggs e Brill)

 Ω Volume de controle

 Ω Função objetivo [10^6 dólares / ano]

 ϑ Functional

SUBSCRITOS

A Relaciona matriz de coeficiente aos termos convectivos

A Vértice A

b Bolha

B Relaciona vetor de coeficientes aos termos difusivos

B Vértice B

C Valor crítico

d Propagação das bolhas

d Descontinuidade

downhole Base do poço

eq Equivalente

EXT Externo ao vértice

f Filme

G Fase gás

GC Gás combustível

h Hidráulico

i Índice neutro

I Interface

IN Entrada

j Índice neutro

k Índice neutro

L Fase líquida

L À esquerda (modelo de Burgers e modelo de águas rasas)

m Médio

M Mistura

max Máximo

n Não-escorregamento

OUT Saída

P Padrão de escoamento

P Tubulação

R Indica valor de referência

R À direita (modelo de Burgers e modelo de águas rasas)

res Reservatório

s Slug

S Superficial

t Translacional

T Indica que a variável de estado é adimensional

T Turbina

TCC Capital total

val Válvula

well Poço

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Eo Número de Eötvös

Fr Número de Froude

Re Número de Reynolds

1 INTRODUÇÃO

1.1 PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

A produção de petróleo e gás natural em campos *offshore* implica na utilização de redes submarinas de escoamento multifásico em dutos e *risers* interligando cabeças de poços, processadores/separadores submarinos, bombas submarinas, plataformas de processamento primário, navios de estocagem e estações finais em terra. Não raro parte deste sistema opera sob lâminas de água superiores a 1000 m, sob expressivos gradientes de pressão, com trocas térmicas entre o fluido e a água do mar, em regimes de escoamento essencialmente transientes e associados ao movimento de duas ou três fases com diferentes velocidades.

O projeto das linhas de transporte multifásico necessita de simulações estacionárias e/ou transientes para cálculo da queda de pressão e para avaliação da presença de comportamentos dinâmicos complexos como a intermitência severa.

É comum que parte do sistema de produção de petróleo opere sob cenários de intermitências, também chamadas de golfadas, ocasionadas pela geometria das tubulações submarinas ou devido à utilização de sistemas de *gas lift* projetados para promover a ascensão de óleo a partir dos poços ao longo dos *risers* que rumam às plataformas. A característica pulsante do escoamento, agravada pela sua natureza multifásica conferem elementos de dificuldade incomuns que não permitem a adoção de uma abordagem mecanística para descrição do comportamento destes sistemas.

Os equipamentos das plataformas são projetados para absorver os picos de pressão e vazão gerados pelas flutuações características da intermitência severa, o que implica em investimentos elevados e possível redução da produção da plataforma.

Recursos computacionais para simulação das redes de escoamento bifásico de óleo e gás, especialmente em cenários dinâmicos, são fundamentais para projeto e otimização de tais estruturas, além de gerarem benefícios secundários como treinamento de operadores e condução de análises de riscos e prevenção de falhas.

1.2 TECNOLOGIAS DE ELEVAÇÃO DO PETRÓLEO

Dentre as áreas tecnológicas de produção de óleo e gás que demandam maiores investimentos, pode-se destacar a elevação artificial. Além de poços de alta produtividade, as altas vazões necessárias para tornar viável a exploração de campos de óleos pesados requerem a adição de energia ao escoamento do óleo desde o poço até a superfície, o que se faz através de tecnologias de elevação artificial.

As tecnologias passíveis de utilização para a elevação de óleos pesados sob águas profundas incluem: *gas lift*, bombeio elétrico centrífugo submerso, bombeio elétrico por cavidades progressivas, bombeio hidráulico a jato e bombeio hidráulico centrífugo submerso. Com exceção do bombeio por cavidades progressivas, a eficiência energética dos demais métodos decresce rapidamente com a viscosidade do óleo. O acionamento elétrico de bombas em ambiente marinho também apresenta sérios problemas que levam a uma baixa vida útil do sistema.

Na produção em águas profundas, em que a pressão do reservatório não é suficiente para garantir a elevação até a superfície com um retorno econômico viável, a necessidade de tecnologias de elevação artificial é mandatória. Uma técnica muito empregada e eficiente é o gas lift, onde a injeção de gás em uma determinada posição do poço reduz a densidade média da coluna de líquido, facilitando a elevação do óleo.

A quantidade de gás injetado é uma variável operacional crítica, pois um baixo valor pode reduzir significativamente a produção de óleo e um valor alto pode elevar os custos operacionais de compressão. Em muitos casos, é possível verificar que a produção de óleo atinge um valor máximo para uma determinada vazão de gás injetado.

As tecnologias de elevação de óleos pesados no cenário marítimo são geralmente complementadas com técnicas de escoamento cujo alvo é a redução da viscosidade equivalente do fluido (redução de atrito). Entre as principais técnicas aplicáveis à produção sob águas profundas, podem ser destacadas: o controle de temperatura, o controle do padrão de escoamento e a diluição com óleo leve. O aumento exponencial da viscosidade com o inverso da temperatura e o aparecimento de fenômenos químicos indesejáveis como a formação de hidratos, impõem a necessidade de um eficaz controle de temperatura, que pode ser obtido através de isolamento térmico e/ou aquecimento da linha, com elevação significativa do custo.

O controle do padrão de escoamento tem por objetivo evitar que o óleo viscoso entre em contato direto com a parede do duto. Isto pode der obtido induzindo-se um padrão de escoamento tendo a água como fase contínua, via escoamento assistido com água, ou utilização de surfactantes para criar uma emulsão de óleo em água, com consequências que irão se manifestar na separação óleo-água.

Sendo assim, a disponibilidade de uma ferramenta computacional de simulação estacionária de escoamento multifásico em dutos de produção de petróleo é de grande relevância para o estudo detalhado de métodos de elevação de petróleo como componente para determinação da viabilidade econômica da produção de campos de óleos pesados.

1.3 FERRAMENTAS COMERCIAIS

Ferramentas comerciais como OLGA e TACITE estão disponíveis, porém por um custo elevado e muitas vezes utilizando uma arquitetura fechada que não se adapta à grande variação das características do petróleo nacional. Outro aspecto relevante é a condição atual de produção de petróleo em águas ultra-profundas sob pressões muito elevadas que, certamente, requerem melhorias nos modelos atualmente disponíveis.

1.4 MOTIVAÇÃO

Há uma crescente demanda das equipes de projeto de redes de escoamento multifásico da indústria de petróleo por ferramentas computacionais capazes de:

- a) fornecer informações relevantes das dinâmicas do sistema frente a perturbações nas condições operacionais, gerando informações fundamentais para o projeto do sistema de controle;
- b) modelar adequadamente alguns fenômenos complexos como intermitência severa e gas lift intermitente;
- c) possibilitar a definição de um projeto ótimo que maximize a produção, minimize os riscos e os custos e possibilite o projeto de sistemas que trabalhem distantes da faixa de intermitência severa, reduzindo assim o risco de paradas da plataforma;
- d) descrever de maneira mais precisa os efeitos de formação de emulsão sobre as propriedades reológicas dos fluidos envolvidos;

 e) descrever o escoamento multifásico em longos trechos de tubulação (comprimento superior a 10 km);

- f) descrever de forma rigorosa a transferência de massa e calor durante a vaporização de leves ao longo da elevação do petróleo nos sistemas de produção em águas profundas;
- g) possibilitar a simulação de múltiplos poços de petróleo e suas interferências à operação das plataformas de petróleo.

2 OBJETIVO

Entre os diversos desafios apresentados antermente, os objetivos desta tese estão focados basicamente nos seguintes pontos:

- a) desenvolver modelos para previsão do comportamento dinâmico de redes de dutos com escoamento multifásico para elevação de petróleo em águas profundas;
- b) desenvolver modelos simplificados para determinação do comportamento estacionário de redes com escoamento multifásico com qualquer topologia;
- aplicar os modelos dinâmicos para simular cenários de intermitência devido ao gas lift;
- d) aplicar os modelos estacionários para simular e otimizar sistemas de elevação artificial de petróleo via gas lift.

Pretende-se aplicar e expandir a metodologia já testada e conduzida em Souza et al. (2004, 2005) no contexto de simulação multifásica de dutos submarinos para a produção de petróleo. A abordagem proposta resultará em uma modelagem apta a reproduzir os fenômenos complexos ocorridos do escoamento entre o poço e a plataforma em sistemas *offshore* de produção de petróleo. O desenvolvimento computacional ocorrerá em MATLAB® R12 (*The Mathworks, Inc.*).

2.1 INOVAÇÕES E CONTRIBUIÇÕES

As inovações/contribuições apresentadas neste trabalho na realização dos objetivos acima são listadas a seguir:

 a) Metodologia para fechamento de modelo dinâmico de escoamento bifásico considerando a transição entre os padrões de escoamento. Na literatura, os modelos de escoamento a dois fluidos são utilizados para a simulação de um único padrão de escoamento;

- b) Desenvolvimento de um modelo estacionário de redes de escoamento bifásico composto por balanços de massa em elementos da rede e balanços de momento em tubos, utilizando a correlação empírica de Beggs e Brill (1982), que pode ser aplicado em redes de escoamento com qualquer topologia;
- c) Desenvolvimento dos modelos dinâmicos de escoamento multifásico em um cenário de redes de escoamento. Não foram encontrados artigos descrevendo modelagens de redes de escoamento bifásico. Todos os trabalhos consultados analisam e descrevem o escoamento em um duto simples. Apenas softwares comerciais contemplam esse tipo de modelo, porém não divulgam na literatura aberta seu equacionamento.
- d) Proposta de um arcabouço para a análise de sistemas de elevação artificial por gas lift contínuo usando um algoritmo de otimização acoplado a um modelo estacionário de redes de escoamento bifásico para qualquer topologia de rede. É apresentada uma função objetivo que considera os custos de capital anualizado sobre compressor, turbina e gasodutos, os custos operacionais relacionados com o combustível e as receitas provenientes do petróleo produzido levando em conta as restrições na disponibilidade de gás.

2.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A Revisão Bibliográfica, descrita no Capítulo 3, foi elaborada com os seguintes objetivos: descrever as diferentes abordagens e modelagens disponíveis na literatura para a descrição do comportamento estacionário e dinâmico do escoamento bifásico em dutos; apresentar o desenvolvimento dos modelos estacionário e dinâmico bifásico e de suas equações de fechamento; apresentar as principais ferramentas comerciais e introduzir os métodos numéricos utilizados para solução do sistema de equações diferenciais parciais que compõem o modelo.

O Capítulo 4 apresenta um modelo dinâmico monofásico com o propósito de testar métodos numéricos além de possibilitar a descrição dos dutos onde apenas uma das fases (gás ou líquido) esteja presente.

O Capítulo 5 descreve os fundamentos utilizados para o desenvolvimento dos balanços de massa e momento que compõem o modelo dinâmico de escoamento bifásico em um duto segundo a abordagem a dois fluidos (modelo a 4 equações). São descritas as principais equações de fechamento e o algoritmo de identificação do padrão de escoamento.

O Capítulo 6 desenvolve um modelo dinâmico de escoamento bifásico em um duto segundo a abordagem de mistura (modelo a 3 equações). Esse modelo será aplicado em problemas mais complexos como elevação artificial.

O Capítulo 7 apresenta os métodos dos resíduos ponderados utilizados para a discretização das equações diferenciais parciais.

O Capítulo 8 apresenta algumas avaliações dos métodos numéricos adotados e dos modelos bifásicos.

O Capítulo 9 define o modelo de redes de escoamento como um digrafo composto por arestas referentes a trechos de tubulação e os vértices como sendo volumes de controle para balanço de massa ou pontos de definição de condições de contorno. Ao final desse capítulo um modelo completo da rede composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias é apresentado.

- O Capítulo 10 descreve os resultados referentes à simulação dinâmica.
- O Capítulo 11 define um modelo estacionário de redes de escoamento bifásico apto para simulação de qualquer topologia de rede.
- O Capítulo 12 formaliza o problema de otimização de sistemas de elevação artificial de petróleo através de *gas lift* contínuo.

O Capítulo 13 descreve os resultados referentes à simulação e alocação ótima de gás para sistemas de *gas lift* considerando como restrição o índice de produção e a disponibilidade de gás.

Em suma, pode-se dividir o desenvolvimento dessa tese em duas partes com objetivos distintos. A primeira parte, composta pelos Capítulos 4 a 10, compreende o estudo dinâmico do escoamento monofásico e bifásico em redes de dutos. A segunda parte, composta pelos Capítulos 11, 12 e 13, está focada na simulação estacionária de redes de escoamento e a utilização desses modelos simplificados na otimização de sistemas de elevação de petróleo.

Finalmente, o Capítulo 14 trata das conclusões referentes aos temas desenvolvidos nessa tese.

Diversos apêndices complementam a tese e estão devidamente referenciados no corpo do texto.

A notação matemática adotada contempla representações de matrizes e vetores além de operações matriciais e descrita detalhadamente no Apêndice I – Notação Matemática. Recomenda-se a leitura preliminar desse apêndice de modo a simplificar a compreensão dos desenvolvimentos matemáticos descritos ao longo do texto dessa tese.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 INTRODUÇÃO

O conhecimento do comportamento dinâmico da pressão, das vazões das fases e dos padrões de escoamento durante o escoamento simultâneo de gás e líquido é fundamental para o projeto de sistemas da indústria química e de petróleo. Engenheiros de Petróleo deparam-se frequentemente com escoamento bifásico em tubulações provenientes dos poços e em linhas de produção (Beggs e Brill, 1982).

O escoamento estacionário bifásico foi amplamente estudado nas últimas décadas. Os primeiros trabalhos correspondem a análises experimentais para a determinação de padrões de escoamento bifásico (Golan e Stenning, 1969).

Govier e Omer (1962) propuseram o conjunto de padrões de escoamento bifásico para tubos horizontais apresentado na Figura 3.1. Diferentes padrões de escoamento são observados quando há transferência de calor com mudança de fase ou quando mais de duas fases estão presentes.



Figura 3.1. Padrões de escoamento bifásico em dutos horizontais

Govier e Aziz (1972) propuseram o conjunto de padrões para dutos verticais. Incluíram um padrão chamado irregular (*churn*) que não será considerado nessa tese e excluíram o padrão estratificado que não é formado para escoamento vertical.

As condições que regem cada tipo de padrão de escoamento são:

- a) disperso-bolhas (doravante chamado bolhas): para elevadas vazões de líquido, pequenas bolhas de gás são dispersas ao longo da fase contínua de líquido. Devido ao efeito do empuxo, essas bolhas tendem a acumular na parte superior da tubulação;
- b) estratificado: para baixas vazões de líquido e de gás, efeitos gravitacionais causam a total separação entre as duas fases. Isso resulta no líquido escoando na parte inferior e o gás na parte superior. Elevações na velocidade do gás geram um aumento da tensão de cisalhamento entre as fases, resultando em uma interface ondulada;
- c) intermitente: conforme as vazões do líquido e do gás são elevadas, o escoamento estratificado se torna mais ondulado até que uma onda alcança toda a seção reta da tubulação. O pistão de líquido resultante, também chamado de slug, é acelerado pela velocidade do gás formando uma região a jusante do slug composta por um filme e uma bolha alongada (bolha de Taylor);
- d) anular: para vazões elevadas de gás, o balanço de forças faz com que o gás escoe no centro da tubulação formando um anel de líquido. Devido à gravidade, a espessura do filme de líquido é maior na parte inferior.

Estudos iniciais do escoamento transiente bifásico foram conduzidos pela indústria nuclear para prever o comportamento do escoamento transiente durante acidentes por falha no resfriamento de reatores (*Loss-of-Coolant Accidents – LOCAs*). Devido à natureza das duas fases (água/vapor), rápidos transientes e fenômenos de transferência de calor estão envolvidos. Um grande número de códigos utilizando modelos a dois fluidos (*two-fluid*) a partir deseis equações diferenciais parciais (EDP's) foi desenvolvido para esse propósito como TRAC, RELAPS5 ou CATHARE (Masella et al., 1998).

Por outro lado, muitos dos fenômenos transientes que ocorrem na indústria de óleo e gás são comparativamente mais lentos. O conhecimento do comportamento dinâmico das Revisão Bibliográfica 10

vazões e pressões dentro de um duto multifásico é de grande importância para a correta operação desses sistemas. Diante disso, desde o início da década de 1980, muitos estudos abordaram o problema de escoamento bifásico em dutos que culminaram no desenvolvimento de diferentes ferramentas comerciais para simulação de escoamento bifásico em dutos (Masella et al., 1998).

3.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ABORDAGENS PARA ESCOAMENTO MULTIFÁSICO

O escoamento multifásico está presente em uma série de fenômenos e sistemas que, de acordo com o nível de precisão exigido e as características específicas de cada aplicação, devem ser abordados de maneira distinta.

Segundo Munkejord (2006), os métodos para resolução de um modelo de escoamento multifásico são:

- a) interface-tracking: possui um elevado custo computacional, sendo baseado em malhas (discretizações) que se ajustam em função da deformação da interface;
- b) particle-tracking: utiliza uma malha fixa para o fluido e a fase dispersa (geralmente com dimensão menor que o tamanho da discretização) que é acompanhada segundo um referencial Lagrangiano;
- c) *multi-fluid* (ou método do *continuum*): mais indicado para escoamento em dutos. Todas as fases envolvidas (partículas, gotas, bolhas, líquidos e gases) são consideradas fluidos interpenetrantes. Por essa abordagem, sistemas complexos podem ser calculados, porém com grande desafio em termos de modelagem. Esse desafio envolve: compreender o comportamento de cada fase, definir um modelo matemático bem-posto, encontrar relações de fechamento e utilizar métodos numéricos robustos e precisos para solução do modelo.

3.3 EVOLUÇÃO DOS MODELOS BIFÁSICOS ESTACIONÁRIOS

Diferentes autores exploraram o desenvolvimento de modelos para o escoamento bifásico estacionário. Esses modelos podem basicamente ser divididos em modelos empíricos (baseados apenas na determinação de correlações a partir de dados experimentais) ou modelos fenomenológicos (baseados em equações de balanço de massa e momento com equações de

fechamento determinadas por intermédio de experimentos em função do padrão de escoamento).

3.3.1 Modelos Empíricos

Os modelos empíricos têm sua aplicação restrita às faixas de diâmetros, vazões e propriedades de fluidos testados para ajuste do modelo. Por outro lado, têm como vantagem a possibilidade de serem aplicados independente do conhecimento do padrão de escoamento, pois esse componente complicador já está incorporado ao modelo.

A seguir são listados os principais trabalhos acerca dos modelos empíricos para escoamento:

- horizontal: Lockhart e Martinelli (1949), Flanigan (1958), Hughmark (1962),
 Eaton et al. (1967), Beggs e Brill (1973) e Oliemans (1976);
- vertical: Hagedorn e Brown (1965) e Beggs e Brill (1973).

Lockhart e Martinelli (1949) desenvolveram uma correlação que, possivelmente, é a mais antiga para a determinação da perda de carga no escoamento bifásico horizontal em dutos. Foi muito empregada principalmente pela sua praticidade, mas pode levar a resultados não muito precisos. A partir da razão entre as perdas de carga das fases líquida e gás calculadas para velocidades superficiais, obtém-se o parâmetros X (posteriormente chamado de parâmetro de Lockhart-Martinelli). Em função do tipo de regime (laminar ou turbulento) em cada fase e do valor do parâmetro X, utilizam-se duas correlações que geram os parâmetros multiplicadores Φ_L e Φ_G . De posse desses parâmetros pode-se obter a perda de carga e a retenção de gás (doravante denominada *hold-up*). A correlação de Lockhart-Martinelli (1949) gera bons resultados para o regime laminar, porém superestima a perda de carga em regimes turbulentos.

Beggs e Brill (1973) desenvolveram uma correlação amplamente utilizada pela indústria de petróleo. Essa correlação foi obtida através de dados experimentais em uma rede de tubulações acrílicas com diâmetros entre 1.0 a 1.5 polegadas e comprimento de 28 m com inclinações ajustáveis. Apesar dos valores restritos de diâmetro e comprimento, essa correlação é bastante utilizada em cálculos preliminares, principalmente por ser válida para todos os padrões de escoamento e inclinações.

3.3.2 Modelos Fenomenológicos

Os modelos fenomenológicos têm uma aplicação mais ampla já que são baseados na descrição das leis físicas que descrevem a dinâmica dos fluidos. No entanto, dependem de equações de fechamento empíricas, que por sua vez são diferentes para cada padrão de escoamento.

A seguir são listados os principais trabalhos referentes a modelos fenomenológicos para escoamento:

- a) horizontal: Taitel e Dukler (1976), Oliemans (1987), Taitel e Barnea (1990), Drew e Wallis (1994), Biberg (2002) e Biberg (2007);
- b) vertical: Aziz et al. (1972), Pots (1985), Taitel e Barnea (1990) e Ullmann et al. (2003).

Taitel e Dukler (1976) desenvolveram um modelo estacionário bifásico para escoamento estratificado para dutos horizontais, inclinados ou verticais. Este modelo foi formatado de maneira adimensional, utilizando o parâmetro de Lockhart-Martinelli (X) e um parâmetro adimensional Y, permitindo a obtenção do *hold-up* por intermédio de: (i) um sistema algébrico composto por duas equações não-lineares ou (ii) um diagrama a partir dos valores de X e Y.

Pots (1985) aplicou o modelo estacionário de Taitel e Dukler (1976) para uma geometria anular.

Taitel e Barnea (1990) desenvolveram um modelo estacionário bifásico para escoamento intermitente a partir de um balanço de momento em uma unidade de *slug* e de uma série de correlações empíricas para a geometria do *slug*.

Drew e Wallis (1994) apresentaram os fundamentos para a modelagem do escoamento bifásico descrevendo os efeitos de cada termo para o escoamento irrotacional invíscido disperso ao redor de uma esfera rígida.

Biberg (2002) apresentou uma solução analítica para o escoamento bifásico laminar estratificado em uma tubulação que possibilita a determinação do *hold-up* e da perda de carga a partir do campo de velocidades.

Ullmann et al. (2003) através de um modelo bifásico estacionário mapeou regiões onde existem três soluções para o *hold-up* do escoamento em um duto inclinado. O efeito da multiplicidade de soluções sobre a transição dos padrões de escoamento é também discutido nesse artigo.

Biberg (2007) desenvolveu um modelo algébrico-logarítmico para o escoamento bifásico turbulento estratificado em uma tubulação com resultados bastante consistentes com os dados de literatura para uma ampla faixa de vazões.

Escoamento estratificado

Bouré (1987) e Coquel et al. (2002) analisaram as equações de fechamento de balanço (massa, momento e energia) necessárias para a modelagem do escoamento bifásico unidimensional.

Fore et al. (2000) determinaram equações de fechamento para a tensão de cisalhamento interfacial. Ishii (1987, 2006) descreveu em detalhes a modelagem da área interfacial utilizada na determinação dos termos de tensão de cisalhamento e arraste entre as fases. Wallis (1987) apresentou diferentes equações de fechamento para o cisalhamento das fases em diferentes padrões de escoamento.

Ullmann e Brauner (2004) utilizaram a solução exata para escoamento laminar bifásico em padrão anular para determinar equações de fechamento para tensão de cisalhamento com a parede e com a interface.

Escoamento disperso

Serizawa e Kataoka (1994) descreveram a modelagem de escoamento disperso-bolhas detalhando as interações entre as fases. Zhang e Prosperetti (1997) descreveram um modelo de escoamento bifásico para padrão de escoamento disperso e suas equações de fechamento.

Escoamento anular

Hewitt e Whaley (1989) detalharam o modelo e as equações de fechamento para o escoamento anular vertical.

Asali (1984), Azzopardi (1997), Azzopardi e Hewitt (1997), Simmons e Hanratty (2001), Al-Sarkhi e Hanratty (2002), Pan e Haratty (2002a, 2002b) e Barbosa et al. (2002)

analisaram os efeitos das gotas de líquidos dispersos na fase gás sobre a estabilidade do escoamento anular. Azzopardi (1999) estudou os efeitos da presença de gotas dispersas de líquido no escoamento anular sobre o aumento da intensidade da turbulência.

Escoamento intermitente

O comportamento dinâmico do escoamento intermitente é bastante complexo como apresentado por King et al. (1998). Segundo experimentos em que foram feitas perturbações nas vazões de alimentação do *loop* de teste foram observados comportamentos complexos e não-lineares na pressão e no *hold-up*.

Outro trabalho que destaca a complexidade do escoamento intermitente é Shemer et al. (2007) que através de técnicas de processamento de imagem analisou o comportamento de duas bolhas de Taylor consecutivas escoando em duto vertical.

Taitel e Barnea (1990) desenvolveram um modelo para a determinação da perda de carga em escoamentos com padrão intermitente a partir de um balanço de momento em uma unidade de *slug* e através de correlações de velocidades translacionais determinadas por Bendiksen (1984), fração de área de gás presente no *slug* segundo metodologia determinada por Barnea e Brauner (1985) e comprimento de *slug* descrito segundo Nicholson et al. (1978).

Gomez et al. (2000) apresentaram uma correlação empírica para a fração de área de líquido no *slug*.

Dukler e Fabre (1994) desenvolveram um modelo para o escoamento intermitente com mais detalhes acerca da zona de mistura do *slug*. Também incorporaram o conceito de que as características do *slug* seguem um comportamento estocástico.

De Henau e Raithby (1995a, 1995b) apresentaram um modelo dinâmico para o escoamento intermitente com maior rigor na descrição das interações entre as fases pela inclusão de termos contendo arraste e força de massa virtual (causada sobre o líquido pelo movimento das bolhas).

Barnea e Taitel (1993) apresentaram uma metodologia de análise do comportamento do comprimento de *slugs* através de simulações estocásticas usando um modelo bastante simplificado. Porém, o trabalho descreve uma interessante metodologia de perturbações

randômicas nas condições de contorno de *hold-up* permitindo analisar estatisticamente a geometria dos *slugs* ao longo do escoamento.

3.4 IDENTIFICAÇÃO DE PADRÃO DE ESCOAMENTO

Um importante requisito para a modelagem fenomenológica do escoamento multifásico é o conhecimento do regime de escoamento. No entanto, é surpreendente que após décadas de trabalho o mecanismo de transição entre alguns padrões de escoamento ainda seja desconhecido. (Hewitt, 2003).

Desde o pioneiro trabalho de Kosterin (1943), diversos autores descreveram variáveis para a previsão do padrão de escoamentos bifásicos, normalmente baseados nas velocidades superficiais de líquido e gás. Este assunto ainda não foi esgotado, visto que a aplicabilidade destas variáveis para a previsão de padrão de escoamento é restrita a poucos sistemas já que muitos pesquisadores focam seus experimentosna mistura ar e água.

Os seguintes trabalhos contribuíram para a formatação de um algoritmo de identificação de padrão de escoamento para diferentes geometrias e inclinações de dutos:

- a) horizontal: Taitel e Dukler (1976);
- b) vertical ascendente: Taitel et al. (1980);
- c) inclinado ascendente: Barnea e Brauner (1985);
- d) inclinado descendente: Barnea et al. (1982a).

Barnea (1987) agregou às contribuições anteriores um modelo para toda a faixa de inclinações, no entanto, a aplicação dessa metodologia para inclinações entre 10° e 70° deve ser feita com cautela, pois os dados experimentais para essa faixa de inclinação são bastante esparsos.

3.5 EVOLUÇÃO DOS MODELOS BIFÁSICOS DINÂMICOS

Os primeiros trabalhos em simulação dinâmica de escoamentos bifásicos tiveram início em meados da década de 90 por uma forte demanda da indústria de petróleo. O trabalho pioneiro de Bendiksen et al. (1986) apresentou o que seria a base para o *software* comercial

OLGA. Após o desenvolvimento do *software*, Bendiksen et al. (1991) apresentaram formalmente o modelo dinâmico do OLGA.

Taitel et al. (1989) apresentaram uma formulação transiente para cálculo do comportamento dinâmico do escoamento bifásico em dutos considerando estado *quasi*-estacionário e balanço de momento com equilíbrio local. Esse trabalho, apesar de modelar adequadamente cenários onde há alta velocidade da fase gás, é incapaz de descrever adequadamente o acúmulo de gás na tubulação.

Sarica e Shoham (1991) aplicaram o modelo dinâmico simplificado de Taitel et al. (1989) para um sistema contendo um duto horizontal e um *riser* gerando resultados de intermitência severa semelhantes aos obtidos experimentalmente.

Pauchon et al. (1994) apresentaram o resultado da pesquisa desenvolvida pelo IFP, um simulador dinâmico que passou a ser vendido comercialmente com o nome de TACITE.

De Henau e Raithby (1995a) apresentaram um modelo dinâmico a dois fluidos com equações de fechamento que descrevem o regime intermitente.

Taitel e Barnea (1997) apresentaram um modelo transiente simplificado com balanço de massa dinâmico e com aproximação de quase-equilíbrio para as equações de balanço de momento para escoamento estratificado e/ou escoamento disperso bifásico que apresentou melhores resultados que o modelo de Taitel et al. (1989).

Masella et al. (1998) e Omgba-Essama (2004) descreveram três modelos para representar o escoamento bifásico dinâmico:

a) a dois fluidos (TFM): baseado na solução de uma equação de conservação de massa por fase e uma equação de conservação de momento por fase, é normalmente empregado para modelagem de escoamento estratificado. O modelo a dois fluidos foi apresentado de forma rigorosa por Ishii (2006). Este descreveu um modelo a dois fluidos, bastante adotado em *softwares* comerciais de CFD, desenvolvendo a média temporal das propriedades físicas onde o intervalo de tempo considerado é composto por três subintervalos: tempo em que o ponto contém a fase 1, tempo em que o ponto contém a interface e tempo em que o ponto contém a fase 2. Ishii (2006) também apresentou as relações para obtenção das médias das derivadas a partir de uma função indicadora de fase;

b) de mistura ou *drift-flux* (DFM): baseado na solução de uma equação de conservação de massa para cada fase, uma equação de conservação de momento total (para ambas as fases) e uma equação algébrica de escorregamento entre as fases, é normalmente empregado para modelagem do escoamento disperso. Um modelo simplificado chamado *Homogeneous Equilbrium Model* (HEM) pode ser obtido do DFM considerando a velocidade de escorregamento entre as fases nula;

c) no-pressure-wave (NPW): também chamado de *Pressure Free Model*, baseia-se na solução de uma equação de balanço de massa para cada fase, uma equação estacionária de balanço de momento e uma equação algébrica de escorregamento entre as fases.

O trabalho de Masella et al. (1998) avaliou as vantagens e desvantagens de cada um desses modelos quanto ao custo computacional e quanto à qualidade da solução obtida. Verificou que o DFM pode ser empregado na simulação de transporte de óleo e gás onde as dinâmicas dos sistemas são de baixa frequência, ou seja, em aplicações onde fenômenos como intermitência severa ou perturbações em condições de contorno não são significativos.

Gallouet et al. (2004) utilizaram um modelo dinâmico de escoamento bifásico que não considera equilíbrio local entre as fases, ou seja, trabalha com duas pressões (uma para cada fase).

Souza et al. (2004, 2005) desenvolveram um simulador dinâmico simplificado a dois fluidos considerando uma estrutura do tipo rede de dutos considerando padrão de escoamento estratificado. Esse trabalho é utilizado como base para os primeiros desenvolvimentos dessa tese de doutorado.

3.6 AVALIAÇÃO DOS MODELOS DINÂMICOS

Bouré (1997a, 1997b, 1997c) comparou os resultados dos modelos dinâmicos de escoamento bifásico quanto à capacidade de prever a velocidade de propagação das ondas dinâmicas (ondas de pressão) e das ondas cinemáticas (ondas de densidade).

Prosperetti (2003) avaliou criticamente os modelos de escoamento bifásico quanto à condição mal-posta das equações diferenciais.

Issa e Kempf (2003) demonstraram por meio de um modelo a dois fluidos transiente unidimensional que é possível simular corretamente as instabilidades do escoamento estratificado e capturar automaticamente a transição para um padrão de escoamento intermitente.

A grande maioria dos modelos desenvolvidos para escoamento bifásico é unidimensional, porém alguns trabalhos, como Lahey e Drew (2003), têm desenvolvido modelos tridimensionais utilizando *softwares* comerciais de fluidodinâmica computacional, como, por exemplo, CFX. Trabalhos como Ishii (1990) apresentam formalmente os modelos a dois fluidos multidimensionais.

Song e Ishii (2000) analisaram a estabilidade das equações diferenciais de um modelo a dois fluidos unidimensional incompressível.

Ndjinga (2007) analisam a hiperbolicidade de um modelo de escoamento bifásico unidimensional invíscido em função dos valores de diferença de pressão entre as fases.

3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS

As equações diferenciais parciais que regem o escoamento bifásico não podem ser resolvidas analiticamente, exceto em casos muito simples como escoamento incompressível, invíscido e estacionário.

Ao longo dos últimos anos ocorreram importantes avanços na fluidodinâmica computacional (CFD) em relação ao desenvolvimento de métodos numéricos precisos pelo desenvolvimento de esquemas de alta resolução, aumento da eficiência pelo desenvolvimento de algoritmos de solução (Patankar, 1980) e aumento do uso de técnicas *multigrid* e de refinamento de malhas (Omgba-Essama, 2004).

O desenvolvimento dos métodos numéricos para escoamento de uma única fase teve velocidade muito superior ao das técnicas para escoamento bifásico (Omgba-Essama, 2004).

Os algoritmos para escoamento multifásico com modelo a dois fluidos podem ser divididos em dois grupos (Omgba-Essama, 2004):

a) baseados no cálculo segregado do campo de pressão: *Inter-Phase Slip Algorithm* (IPSA) e *Implicid Multi-Field Algorithms* (IMF);

b) baseados no cálculo de todos os campos: *Riemann solvers* (p.e. Godunov), esquemas do tipo *upwind* (p.e. Roe), esquemas do tipo *splitting* (p.e. FDS e FVS), esquemas híbridos (p.e. AUSM) e esquemas de alta-resolução para captura de choques.

A escolha do método numérico depende da formulação do modelo de escoamento bifásico adotada. Para modelos a dois fluidos, métodos do tipo Roe (1981) são os melhores candidatos já que possibilitam uma solução *upwind*, devendo-se atentar para a existência de termos não-conservativos. Para modelos *drift-flux*, métodos do tipo diferenças centrais podem ser empregados gerando resultados com boa precisão e menor esforço computacional (Munkejord, 2006).

Adrianov (2003) desenvolveu o método VFRoe a partir de uma aproximação do método Godunov para analisar um modelo simplificado baseado nas equações de Euler.

Munkejord (2006) analisou e comparou diferentes modelos e métodos numéricos para escoamento bifásico, como métodos do tipo Roe, FLIC (flux-limiter centred) e FORCE (first-order centred) para modelos a dois fluidos e métodos do tipo Roe e MUSTA (multi-stage centred-scheme) para modelos drift-flux. Coelho (2006) avaliou métodos numéricos aplicados a equações hiperbólicas de escoamento bifásico segundo métodos não baseados na soma de Riemann (AUSM e HLFLW) e baseados na soma de Riemann (Godunov, Roe e MUSCL).

Poucos trabalhos foram encontrados na literatura com exemplos de aplicação de métodos do tipo *Galerkin* de elementos finitos para o escoamento bifásico. Uchiyama (1999) propõe um método de *Petrov-Galerkin* utilizando funções peso do tipo exponencial para problemas bi-dimensionais de escoamento bifásico incompressível. Pires Neto (2001) aplicou o método de *Galerkin* em um modelo dinâmico de escoamento compressível unidimensional de um fluido homogêneo.

3.8 ABORDAGEM SEGUNDO REDES DE ESCOAMENTO

A solução de problemas de escoamento em redes de dutos monofásicos (oleodutos ou gasodutos) é um tema amplamente abordado na literatura, como por exemplo, pode-se citar os trabalhos de Mah (1990) e Costa et al. (1998).

A grande maioria dos autores foca seus estudos em cenários contendo um único duto, ocasionando um vazio na literatura acerca de estudos envolvendo o problema de redes de

escoamento multifásicas. Uma exceção é o trabalho de Floquet et al. (2009) que apresentou um modelo de rede para simulação desde o poço de petróleo até a plataforma com cada trecho de tubulação sendo calculado através de um *software* comercial e um algoritmo de interconexão para garantir o fechamento dos balanços de massa e momento em cada extremidade.

No entanto, a abordagem segundo redes de escoamento para transporte multifásico na literatura se resume a raros trabalhos, como, por exemplo, Dutta-Roy e Kattapuram (1997) e Kosmidis et al. (2005), que aplicaram um modelo que considerando geometrias simplificadas para produção de petróleo para a otimização de um sistema de elevação artificial por *gas lift*.

3.9 SOFTWARES COMERCIAIS

3.9.1 OLGA

O *software* comercial mais difundido entre as empresas de petróleo é o OLGA. Inicialmente concebido e desenvolvido por Dag Malnes e Kjell Bendiksen no IFE (*Institute for Energy Technology*) em 1979 e 1980 (Bendiksen et al., 1986, 1991), com financiamento até 1983 pela Statoil. Em 1993, a Scandpower (atualmente chamada SPT Group) recebeu o direito de comercialização do OLGA.

Originalmente, o OLGA utilizava um modelo *a dois fluidos*, porém alterações subsequentes levaram à implementação de um modelo dinâmico *a dois fluidos estendido* que assume a possível existência de três fases (gás, líquido e fase dispersa de gotículas de líquido) via: (i) uma equação de balanço de massa é utilizada para cada uma das três fases, (ii) duas equações de balanço de momento (uma para a fase gás incluindo a fase dispersa e uma para a fase líquida) e (iii) uma equação de conservação de energia para a mistura. Duas classes de padrões de escoamento são utilizadas: distribuído (intermitente ou bolhas) e separado (estratificado ou anular). A transição entre os padrões de escoamento é baseada na fração de área média e determinada de acordo com o conceito de mínimo escorregamento onde é escolhido o padrão de escoamento que leve à menor velocidade de gás (Omgba-Essama, 2004).

Em meados de 2000, foi lançado o chamado OLGA 2000 com uma série de facilidades e interfaces para configuração. Atualmente a versão comercializada é 6.0, porém prevê-se que em 2010 será lançado o HORIZON, que terá uma reformulação completa do

modelo capaz de simular adequadamente dutos de transporte multifásico de longas distâncias (Bendiksen, 2007).

A versão OLGA 2000 possui um modelo a dois fluidos contendo oito equações diferenciais parciais: cinco equações de balanço de massa (fase contínua de gás, fase contínua de líquido, fase contínua de água, fase dispersa de água e fase dispersa de óleo), duas equações de balanço de momento (fase contínua de gás contendo gotas de líquido e água e fase contínua de líquido) e uma equação de balanço de energia para a mistura. As equações de balanço de massa são acopladas através de termos de transferência de massa. As equações de fechamento (massa, momento e calor) são fenomenológicas com correções empíricas (Scandpower, 2005).

As equações de fechamento empíricas foram desenvolvidas no *loop* experimental da SINTEF (*Tiller Test Facility*), que possui um trecho horizontal de 334 m, um trecho com inclinação variável de 65 m e um trecho vertical de 54 m com diâmetros entre 0.1 m e 0.3 m e pressão de operação de até 90 bar, e no *loop* experimental do IFE, que possui um trecho com inclinação de 0 a 90°, diâmetro de 0.1 m e pressão de até 10 bar. Outros testes permitiram a validação do modelo OLGA 2000 para tubulações de diâmetros de 1 in a 8 in (alguns testes com 30 in), razão comprimento / diâmetro de até 5000, inclinações de -15° a 90°, pressões de 1 a 100 bar e com uma grande variedade de fluidos (Scandpower, 2005).

Outras evoluções do *software* são referentes à simulação de redes de escoamento convergentes ou divergentes, incorporação de equipamentos nos contornos dos trechos de tubulação (separadores bifásicos e trifásicos, compressores, bombas, trocadores de calor, válvulas, controladores, poços de petróleo e bombas multifásicas) além de módulos específicos que permitem o aumento do rigor na determinação das equações de fechamento e das propriedades dos fluidos (módulo trifásico, módulo de acompanhamento de *slugs*, módulo de acompanhamento composicional, módulo de acompanhamento de aditivos, módulo de modelagem de fluidos complexos, módulo de elementos finitos para a determinação do coeficiente de troca térmica, módulo de análise de deposição de parafinas e módulo de corrosão) (Scandpower, 2005).

3.9.2 TACITE

Desenvolvido a partir de 1990, TACITE possui um modelo do tipo *drift-flux* para a simulação de escoamento bifásico em redes de dutos resolvido através do método numérico

VFRoe. Foi concebido através de um projeto de pesquisa com parceria entre o IFP (Instituto Francês de Petróleo) e a TotalFinaElf.

O modelo é composto por uma equação de balanço de massa para cada fase, uma equação de balanço de momento para a mistura e uma equação de balanço de energia para a mistura. Informações sobre o escorregamento entre as fases são obtidas através de uma relação estacionária dependente do padrão de escoamento. São utilizadas duas classes de padrão de escoamento: escoamento separado (estratificado ou anular) e escoamento disperso (bolhas ou gotas). O escoamento intermitente é considerado como uma combinação entre essas duas classes. Um conjunto de equações de fechamento foi validado por um número significativo de dados experimentais. As propriedades físicas das fases são determinadas através de um pacote termodinâmico (Omgba-Essama, 2004).

3.10 PRODUÇÃO DE PETRÓLEO E GÁS NATURAL

Os sistemas de elevação de petróleo são frequentemente operados em condições de intermitência severa (severe slugging), nas quais a geometria da linha de produção propicia o acúmulo de líquido nas cotas inferiores. Quando há um acúmulo de líquido, tal que ocorre o bloqueio da passagem do gás, é formado um pistão de líquido, também chamado de slug, que é deslocado ao longo da rede de dutos. Taitel (1986) descreveu as condições sob as quais o fenômeno de intermitência severa ocorre, além de apresentar as condições e alterações necessárias para a eliminação ou amenização desse fenômeno.

De Henau e Raithby (1995c) avaliaram experimentalmente o fenômeno de intermitência devido ao terreno (*terrain induced slugging*) e validaram o modelo apresentado em De Henau e Raithby (1995a, 1995b) para essas novas condições operacionais.

"Na elevação artificial de petróleo utilizando a técnica de *gas lift*, a quantidade de gás injetado é uma variável operacional crítica, pois um baixo valor pode reduzir significantemente a produção de óleo e um valor alto pode elevar os custos operacionais de compressão." Muitos autores exploraram esse problema de otimização determinando as condições ótimas para a extração da máxima quantidade de óleo considerando ou não restrições na disponibilidade de gás e usando diferentes formulações: programação linear (Fang e Lo, 1996), programação linear inteira mista (Kosmidis et al., 2005), programação não-linear (Alarcon et al., 2002), programação dinâmica (Camponogara e Nakashima, 2006) e algoritmos genéticos (Ray e Sarker, 2007).

Como descrito por Dutta-Roy e Kattapuram (1997), o problema de otimização de *gas lift* deve considerar os efeitos de interação entre poços quando estes compartilham a mesma linha de produção. Essa é uma séria limitação da maioria dos *softwares* comerciais de simulação de reservatórios onde a otimização do *gas lift* é realizada separadamente em cada poço. A exceção dos trabalhos de Dutta-Roy e Kattapuram (1997), Kosmidis et al. (2005) e Barragán-Hernandez et al. (2005), a literatura de otimização de *gas lift* é restrita a avaliação de cada poço isoladamente utilizando modelos hidrodinâmicos simplificados. Em outras palavras, os efeitos de rede normalmente encontrados em sistemas submarinos complexos, onde dois ou mais poços dividem a mesma linha de produção, não são levados em consideração.

3.11 VISÃO GERAL

Diante da visão geral da literatura acerca da simulação de escoamento bifásico é possível identificar os seguintes pontos relevantes para a tese:

- a) Os autores dedicaram-se ao estudo de apenas um trecho de tubulação, ou seja, não foram encontradas referências que descrevam o emprego de modelos de escoamento bifásico em redes de dutos. Apesar de os softwares comerciais serem capazes de representar estruturas complexas de redes, esse tema não foi explorado na literatura aberta;
- b) A representação dos balanços de massa e de momento é feita na forma conservativa. Não foram encontrados artigos que tratem os modelos em sua forma primitiva, ou seja, na forma em que as variáveis de interesse de engenharia como pressão e vazões mássicas representam os estados do sistema de equações. Cabe ressaltar que a representação do modelo na forma primitiva simplifica significativamente a simulação de redes de escoamento, já que permite a imposição direta de condições de contorno;
- c) Outro ponto não encontrado na literatura refere-se ao desenvolvimento de um modelo fenomenológico em que as equações de fechamento sejam ativadas continuamente ao longo da transição entre os padrões de escoamento. Os trabalhos restringem-se a descrição de modelos dentro de um padrão específico de escoamento;

d) A otimização da elevação de petróleo é feita cosiderando-se os poços separadamente. Problemas onde mais de um poço compartilha uma linha de produção não foram abordados na literatura.

4 MODELAGEM DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO

4.1 INTRODUÇÃO

Apesar da presente tese ter como objetivo principal a simulação do escoamento multifásico, os sistemas de produção de petróleo são compostos por uma rede de dutos que podem conter duas fases ou apenas uma fase (linhas de injeção de gás e trechos do poço onde apenas o líquido está presente).

Com essa motivação e pela necessidade de avaliar o desempenho dos métodos numéricos utilizados, desenvolveu-se a modelagem para o escoamento monofásico (gás ou líquido) que será detalhada nas seções a seguir.

O modelo dinâmico de escoamento compressível ao longo de um duto implica em um sistema de EDP's não-lineares envolvendo a equação da continuidade e os balanços de momento e energia. Uma abordagem rigorosa na resolução dessas equações implicaria em considerável esforço computacional, o que poderia dificultar a aplicação deste algoritmo para a simulação de redes de grande porte (Pires Neto, 2001).

Aplicam-se, então, as seguintes premissas que simplificam a modelagem mantendo a precisão necessária para o estudo dos fenômenos de interesse:

- a) fluxo unidimensional (pressão e vazão dependem apenas das coordenadas tempo e posição axial);
- b) densidade dos fluidos determinadas através de uma relação entre estados politrópicos;
- c) fluidos newtonianos com viscosidade constante.

A relação de escoamento estabelece um modelo teórico entre pressão e densidade, que no presente caso, advém de uma expressão semi-empírica baseada no escoamento politrópico de um gás ideal. Desta forma, balanços de energia, ao longo dos trechos de tubulação, não são necessários, resultando que a temperatura não necessita ser considerada como uma variável do sistema. Assim sendo, o modelo pode ser reduzido, como acima mencionado, às equações de conservação de massa e momento. A aplicação conjunta dessas duas expressões, considerando-se as premissas acima citadas, resulta em duas equações diferenciais parciais

não-lineares, não-homogêneas de primeira ordem, cuja resolução levará ao conhecimento espaço-temporal da pressão e vazão de escoamento no duto (Pires Neto, 2001).

4.2 NOTAÇÕES BÁSICAS

Seja um volume de controle de fluido $\Omega(t)$ entre as coordenadas x e $x+\Delta x$ de um duto fechado de comprimento L em m para um determinado instante de tempo t em s, tendo vazão mássica q em kg/s, densidade ρ em kg/m³ e velocidade média v em m/s ao longo da seção transversal do duto, conforme apresentado na Figura 4.1.

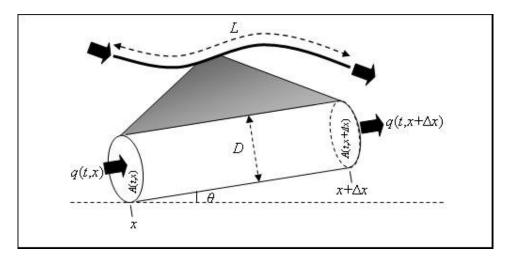


Figura 4.1. Volume de controle

4.3 EQUAÇÕES DE BALANÇO DE MASSA

Fazendo-se balanços de massa em um referencial Euleriano no volume de controle:

$$\begin{pmatrix}
\Delta V(\overline{x}) \frac{\partial \rho(t, \overline{x})}{\partial t} \\
\downarrow \\
\text{Acúmulo}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
q(t, x) \\
\downarrow \\
\text{Entrada}
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}
q(t, x + \Delta x) \\
\downarrow \\
\text{Saída}
\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

que corresponde a:

$$A(\overline{x})\frac{\partial\rho(t,\overline{x})}{\partial t} = \frac{q(t,x) - q(t,x + \Delta x)}{\Delta x}$$
(4.2)

Tomando-se o limite para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$A(x)\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial q(t,x)}{\partial x} \tag{4.3}$$

Simplificando-se a notação, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial x} \tag{4.4}$$

4.4 EQUAÇÕES DE BALANÇO DE MOMENTO

Considerando-se *P* como sendo a pressão média ao longo da seção transversal do duto, aplicando-se o princípio de conservação do momento, o balanço de forças no volume de controle é dado por:

$$\begin{bmatrix}
\left(\left(\rho v^{2} A\right)\right|_{t,x} \\
\downarrow \\
\text{Entrada de Momento}
\end{bmatrix} - \left(\left(\rho v^{2} A\right)\right|_{t,x+\Delta x} \\
\downarrow \\
\text{Entrada de Momento}
\end{bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix}
\Delta V(\bar{x}) \frac{\partial \left(\rho(t, \bar{x}) v(t, \bar{x})\right)}{\partial t} \\
\downarrow \\
\text{Acúmulo de de Momento}
\end{bmatrix} = \begin{cases}
+ \begin{pmatrix} \left(AP\right)\right|_{t,x} \\
\downarrow \\
\text{Força de Contato na Entrada}
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(AP\right)\right|_{t,x+\Delta x} \\
\downarrow \\
\text{Força de Contato na Saída}$$

$$- \begin{pmatrix} \left(\Gamma \Delta x\right)\right|_{t,\bar{x}} \\
\downarrow \\
\text{Forças}
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(A\rho \operatorname{sen}(\theta) g \Delta x\right)\right|_{t,\bar{x}} \\
\downarrow \\
\text{Forças de Campo}$$

Tomando-se o limite para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{\partial \left(\rho(t,x)v(t,x)\right)}{\partial t} = -\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\rho(t,x)v^2(t,x)\right)}{\partial x} - \frac{\Gamma(t,x)}{A(x)} - \rho(t,x)\operatorname{sen}\left(\theta(x)\right)g \tag{4.6}$$

onde o termo dissipativo Γ corresponde à energia dissipada na forma de cisalhamento, conforme descrito a seguir:

$$\Gamma(t,x) = K(x)\tau(t,x) \tag{4.7}$$

onde K é o perímetro de cisalhamento em m e a tensão de cisalhamento τ é definida segundo o fator de atrito de $Fanning\ f$ através da relação:

$$\tau = f \frac{\rho |v| v}{2} \tag{4.8}$$

A densidade ρ e a compressibilidade c são definidas como funções unicamente da pressão (ver Subseção 5.7), onde:

$$\rho = \rho(P)$$

$$c = \frac{d\rho(P)}{dP}$$
(4.9)

Simplificando-se a notação, tem-se:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} - \frac{\Gamma}{A} - \rho \operatorname{sen}(\theta) g \tag{4.10}$$

4.5 SISTEMA DE EQUAÇÕES

O sistema de duas equações diferenciais parciais não-lineares, não homogêneas de ordem um que modelam o escoamento monofásico é:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial x} \\
\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial x} - \frac{\Gamma}{A} - \rho \operatorname{sen}(\theta) g
\end{cases} \tag{4.11}$$

Fazendo-se as devidas modificações nos termos conservativos e aplicando-se a regra da cadeia nos termos diferenciais, obtém-se a forma não-conservativa do sistema de EDP's:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{Ac} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} = -A(1 - cv^2) \frac{\partial P}{\partial x} - 2v \frac{\partial q}{\partial x} - \Gamma - \rho g A \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$
(4.12)

Visando ter todas as variáveis de estado com a mesma ordem de grandeza, é feito um escalonamento utilizando a pressão de referência P_R , obtendo-se as equações em termos da pressão adimensional P_T :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_T}{\partial t} = -\frac{1}{Ac P_R} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} = -AP_R \left(1 - c v^2 \right) \frac{\partial P_T}{\partial x} - 2 v \frac{\partial q}{\partial x} - \Gamma - \rho g A \operatorname{sen} \left(\theta \right) \end{cases}$$
(4.13)

Representado-se o sistema de equações na forma matricial, o que simplificará a resolução desse modelo pelos métodos numéricos de discretização de equações diferenciais parciais obtém-se:

$$\left[\frac{\partial \underline{y}}{\partial t}\right] + \underline{\underline{M}}_{A} \left[\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right] + \underline{\underline{M}}_{B} = \underline{0}$$
(4.14)

onde o vetor de variáveis de estado do modelo é definido como $\underline{y} = \begin{bmatrix} P_T & q \end{bmatrix}^T$, a matriz de coeficientes \underline{M}_A de dimensão $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ e o vetor de coeficientes \underline{M}_B de dimensão $\mathbf{2} \times \mathbf{1}$ têm a seguinte forma:

$$\underline{\underline{M}}_{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{P_{R} A c} \\ A P_{R} (1 - c v^{2}) & 2v \end{bmatrix}$$

$$(4.15)$$

$$\underline{M}_{B} = \left[0 \quad \left(\Gamma + \rho \, g \, A \operatorname{sen}\left(\theta\right)\right)\right]^{T} \tag{4.16}$$

5 MODELAGEM DE ESCOAMENTO BIFÁSICO: ABORDAGEM VIA 4 EQUAÇÕES

5.1 INTRODUÇÃO

O termo escoamento multifásico é utilizado para descrever o escoamento de um fluido contendo mais de uma fase. Ao longo dessa tese, será dada maior relevância ao escoamento bifásico gás-líquido, porém a modelagem e os métodos numéricos apresentados podem ser alterados de modo a atender problemas com três ou mais fases fluidas.

Diversos autores utilizam a classificação do escoamento multifásico segundo a sua topologia como <u>escoamento disperso</u> e <u>escoamento separado</u>. O escoamento disperso consiste de uma topologia onde há uma fase dispersa composta por partículas, gotas ou bolhas. O escoamento separado consiste de uma ou mais fases contínuas de diferentes fluidos separados por interfaces bem definidas. No caso de escoamento bifásico, a classificação do escoamento conforme padrões de escoamento é mais usual e está apresentada em detalhes na Subseção 3.1.

A modelagem do escoamento multifásico baseia-se obviamente nos métodos clássicos desenvolvidos pela mecânica do contínuo, para um domínio dividido em diferentes subregiões monofásicas com interfaces variáveis entre as fases. Conforme detalhado por Ishii e Hibiki (2006), esse problema pode ser abordado de duas formas:

- a) formulação local instantânea: na qual as fronteiras entre as fases são conhecidas em cada instante de tempo, gerando sérias complicações matemáticas muitas vezes intransponíveis para os problemas práticos de engenharia. A aplicação direta da formulação local instantânea pode ser feita nos escoamentos em que todas as fases envolvidas podem ser consideradas contínuas (escoamento separado), como, por exemplo, para padrões estratificados e/ou anulares isentos de ondas interfaciais;
- b) através de métodos baseados em médias Eulerianas, Lagrangianas ou Estatísticas sobre a base fundamental definida através da formulação local instantânea.

Nessa tese será desenvolvido um modelo a dois fluidos utilizando uma formulação segundo médias temporais em um referencial Euleriano para ambas as fases para a modelagem de escoamentos disperso e/ou separado através de equações de fechamento

baseadas em correlações empíricas segundo quatro regimes de escoamento distintos: estratificado, anular, bolhas e intermitente.

As principais premissas adotadas nessa modelagem são:

- a) escoamento unidimensional: todas as variáveis de estado dependem apenas do tempo e da posição axial ao longo do tubo;
- b) escoamento bifásico gás e líquido;
- c) escoamento politrópico: fenômenos de transferência de calor entre as fases ou entre o duto e o ambiente são descritos através de uma relação de transição politrópica para ambas as fases;
- d) ausência de reações químicas e/ou fenômenos de transferência de massa entre as fases;
- e) fluidos compressíveis e newtonianos com viscosidade constante;
- f) transição instantânea entre padrões de escoamento; e
- g) efeitos de tensões superficiais são desprezíveis.

Essas premissas foram adotadas de modo a possibilitar a redução do esforço computacional e viabilizar a análise dos problemas de engenharia abordados na tese. O modelo assim estabelecido possibilita a análise do escoamento sem a necessidade de solução de um problema multidimensional e sem a utilização de balanços de energia.

Cabe ressaltar que a decisão de não considerar os fenômenos de transferência de massa e calor pode gerar resultados com apreciável desvio para cenários em que: a fase líquida é leve, ou seja, possui em sua composição frações que podem ser volatilizadas ao longo do escoamento devido à redução na pressão do fluido; e a diferença de temperatura entre o meio externo e os fluidos interfere nos perfis de temperatura ao longo do escoamento (p.e., partidas e paradas de linhas submarinas).

5.2 DEFINIÇÕES INICIAIS

Antes de desenvolver o modelo propriamente dito, faz-se necessário detalhar a aplicação da média temporal na definição de importantes variáveis utilizadas na modelagem

do escoamento bifásico. Com o objetivo de apresentar o problema de escoamento bifásico de maneira formal, foi considerado que o valor de densidade em uma determinada coordenada espacial \underline{x} de um domínio onde esse escoamento está presente, quatro observações distintas podem ser obtidas:

 $\rho(t,\underline{x}) = \rho_L \Rightarrow \underline{x}$ sempre contém fase L $\rho(t,\underline{x}) = \rho_G \Rightarrow \underline{x}$ sempre contém fase G $\rho_G < \rho(t,\underline{x}) < \rho_L \Rightarrow \underline{x}$ contém interface durante um tempo finito $\rho(t,\underline{x}) = \rho_G \text{ ou } \rho(t,\underline{x}) = \rho_L \Rightarrow \underline{x}$ sempre contém alternadamente fases G e L

Pode-se então definir as funções de indicadoras de fase M_L , M_G e M_I em função da densidade para um determinado tempo t em uma coordenada \underline{x} , como:

$$M_{L}(t,\underline{x}) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \rho(t,\underline{x}) = \rho_{L} \\ 0 \Leftrightarrow \rho(t,\underline{x}) \neq \rho_{L} \end{cases}$$
 (5.1)

$$M_{G}(t,\underline{x}) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow \rho(t,\underline{x}) = \rho_{G} \\ 0 \leftrightarrow \rho(t,\underline{x}) \neq \rho_{G} \end{cases}$$
(5.2)

$$M_{I}(t,\underline{x}) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow \rho(t,\underline{x}) \notin \{\rho_{L},\rho_{G}\} \\ 0 \leftrightarrow \rho(t,\underline{x}) \in \{\rho_{L},\rho_{G}\} \end{cases}$$

$$(5.3)$$

Pode-se então definir a função média temporal de densidade de fase α_k , para uma interface com espessura δ como sendo:

$$\alpha_{k}\left(t,\underline{x}\right) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\Lambda t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} M_{k}\left(t,\underline{x}\right) dt \tag{5.4}$$

A função média temporal de densidade de fase é fundamental para a formulação de equações para campos determinados via médias temporais. O significado físico de α_k é a probabilidade de encontrar a fase k. Como a abordagem utilizada nessa tese adota um sistema de coordenadas unidimensional ao longo do eixo axial de uma tubulação cilíndrica, essa variável α_k será doravante chamada de fração de área da fase k.

A aplicação formal e rigorosa de médias temporais em uma equação de balanço genérica em coordenadas cartesianas sob a formulação local instantânea, gerando assim

equações para campos determinados segundo médias temporais, foi apresentada detalhadamente por Ishii (2006). Nessa tese será focada a solução de problemas unidimensionais com aplicações práticas de engenharias, sendo assim, flutuações nos campos de velocidades e flutuações em α_k não serão consideradas, sendo adotadas correlações empíricas para a determinação das tensões de cisalhamento. Todas as representações matemáticas mostradas nos itens a seguir consideram os valores médios das variáveis envolvidas no escoamento, não sendo considerados os termos oriundos das flutuações devido à turbulência ou perturbações típicas de interfaces bifásicas, efeitos esses incorporados pelos termos dissipativos empíricos.

5.3 NOTAÇÕES BÁSICAS

Seja um volume de controle de fluido Ω entre as coordenadas x e x + Δx de um duto fechado de comprimento L, composto por uma fase líquida e uma fase gás, tendo vazões mássicas de líquido q_L e de gás q_G , frações de área ocupadas por gás α_G e por líquido α_L , conforme ilustrado na Figura 5.1.

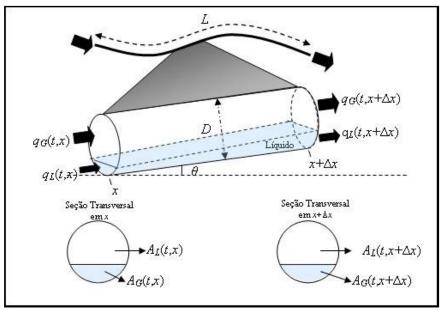


Figura 5.1. Volume de controle

Esse volume de controle pode ser decomposto em um volume de líquido (Ω_L) e um volume de gás (Ω_G) , onde:

$$\Omega = \Omega_L \cup \Omega_G$$

$$\Delta V(x) = \left(A_L(t, x) + A_G(t, x) \right) \Delta x$$
(5.5)

Definindo-se α_L e α_G como as frações de área de seção transversal ocupadas pelas fases líquida e gás, respectivamente, onde:

$$A_{G}(t,x) = \alpha_{G}(t,x)A(x)$$

$$A_{L}(t,x) = \alpha_{L}(t,x)A(x)$$

$$\alpha_{G}(t,x) + \alpha_{L}(t,x) = 1$$
(5.6)

5.4 ANÁLISE DIFERENCIAL DO BALANÇO DE MASSA POR FASE

Fazendo-se balanços de massa em um referencial Euleriano nos volumes de controle da fase N, onde N=L para fase líquida e N=G para fase gás:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \left(\rho_{N}\left(t,\overline{x}\right)\Delta V_{N}\left(\overline{x}\right)\right)}{\partial t} \\
\downarrow \\
\text{Acúmulo}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
q_{N}\left(t,x\right) \\
\downarrow \\
\text{Entrada}
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}
q_{N}\left(t,x+\Delta x\right) \\
\downarrow \\
\text{Saída}
\end{pmatrix}$$
(5.7)

Aplicando-se (5.5) em (5.7):

$$A(\overline{x})\frac{\partial(\rho_N(t,\overline{x})\alpha_N(t,\overline{x}))}{\partial t} = \frac{q_N(t,x) - q_N(t,x + \Delta x)}{\Delta x}$$
(5.8)

Tomando-se o limite para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$A(x)\frac{\partial(\rho_N(t,x)\alpha_N(t,x))}{\partial t} = -\frac{\partial q_N(t,x)}{\partial x}$$
(5.9)

Simplificando-se a notação de (5.9), tem-se:

$$\frac{\partial \left(\rho_N \, \alpha_N\right)}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_N}{\partial x} \tag{5.10}$$

5.5 ANÁLISE DIFERENCIAL DO BALANÇO DE MOMENTO POR FASE

Antes de detalhar o balanço de momento para o escoamento bifásico é importante definir pressões médias de cada fase *N* ao longo da seção transversal:

$$P_{N}(t,x) = P(t,x) + \Delta P_{N}(t,x)$$
(5.11)

Aplicando-se o princípio da conservação de momento em um volume de controle, o balanço das forças que agem sobre a fase N na direção axial do tubo é dado por:

$$\left(\begin{array}{c} \left(\rho_{N} \, v_{N}^{2} \, A_{N}\right)\big|_{l,x} \\ \downarrow \\ \text{Entrada de Momento da} \\ \text{Fase N} \end{array}\right) = \begin{cases} \left(\rho_{N} \, v_{N}^{2} \, A_{N}\right)\big|_{l,x+\Delta x} \\ \downarrow \\ \text{Saída de Momento da} \\ \text{Fase N} \end{cases} + \dots \\ \begin{cases} P_{N}\big|_{l,x} \, A_{N}\big|_{l,\overline{x}} \\ \downarrow \\ \text{Força de Contato na Entrada da} \\ \text{Fase N} \end{cases} - \begin{cases} P_{N}\big|_{l,x+\Delta x} \, A_{N}\big|_{l,\overline{x}} \\ \downarrow \\ \text{Força de Contato na Saída da} \\ \text{Fase N} \end{cases} + \dots \\ \begin{cases} P_{N}\big|_{l,x+\Delta x} \, A_{N}\big|_{l,\overline{x}} \\ \downarrow \\ \text{Força de Contato na Entrada da} \\ \text{Interface} \end{cases} - \begin{cases} A_{N}\big|_{l,x+\Delta x} \, \Delta P_{N}\big|_{l,\overline{x}} \\ \downarrow \\ \text{Força de Contato na Entrada da Interface} \end{cases} - \begin{cases} A_{N}\big|_{l,x+\Delta x} \, \Delta P_{N}\big|_{l,\overline{x}} \\ \downarrow \\ \text{Força de Contato na Saída da Interface} \end{cases} - \begin{cases} A_{N} \, \rho_{N} \, \text{sen} \left(\theta\right) \, g \, \Delta x \right)\big|_{l,x} \end{cases} + \dots \\ \begin{cases} P_{N}\big|_{l,x+\Delta x} \, \Delta P_{N}\big|_{l,x} \\ \downarrow \\ \text{Força de Contato na Saída da Interface} \end{cases} - \begin{cases} A_{N} \, \rho_{N} \, \text{sen} \left(\theta\right) \, g \, \Delta x \right)\big|_{l,x} \end{cases} + \dots \end{cases}$$

onde o termo dissipativo Γ_N corresponde à energia dissipada pela fase N na forma de cisalhamento, conforme descrito a seguir:

$$\Gamma_{N}(t,x) = K_{N}(t,x)\tau_{N}(t,x) + K_{IN}\tau_{IN}(t,x)$$
(5.13)

sendo K_N e K_{IN} os perímetros de contato entre a fase N e a parede do duto e a fase N e a interface, respectivamente.

Tomando-se o limite para $\Delta x \rightarrow 0$ em (5.12), tem-se:

$$\frac{\partial (\rho_{N}\alpha_{N}v_{N})}{\partial t} = \begin{pmatrix}
-\alpha_{N} \frac{\partial P_{N}}{\partial x} - \Delta P_{N} \frac{\partial \alpha_{N}}{\partial x} + \\
-\frac{\partial (\rho_{N}\alpha_{N}v_{N}^{2})}{\partial x} + \\
-\frac{\Gamma_{N}}{A} - \rho_{N} g \alpha_{N} \operatorname{sen}(\theta)
\end{pmatrix} (5.14)$$

Simplificando-se a notação de (5.14) tem-se:

$$\frac{\partial (\rho_N \, \alpha_N \, v_N)}{\partial t} = -\alpha_N \, \frac{\partial P_N}{\partial x} - \Delta P_N \, \frac{\partial \alpha_N}{\partial x} - \frac{\partial (\rho_N \, \alpha_N \, v_N^2)}{\partial x} - \frac{\Gamma_N}{A} - \rho_N \, g \, \alpha_N \, \text{sen}(\theta) \tag{5.15}$$

5.6 SISTEMA DE EQUAÇÕES

O modelo de escoamento bifásico na forma conservativa seguindo as premissas determinadas na Subseção 5.1 é composto pelas duas equações (5.10) e (5.15) para cada fase *N* envolvida, que corresponde ao seguinte sistema de equações diferencias parciais não lineares, não homogêneas de primeira ordem:

$$\begin{cases}
\frac{\partial (\rho_{N} \alpha_{N})}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_{N}}{\partial x} \\
\frac{\partial (\rho_{N} \alpha_{N} v_{N})}{\partial t} = -\alpha_{N} \frac{\partial P_{N}}{\partial x} - \Delta P_{N} \frac{\partial \alpha_{N}}{\partial x} - \frac{\partial (\rho_{N} \alpha_{N} v_{N}^{2})}{\partial x} - \frac{\Gamma_{N}}{A} - \rho_{N} g \alpha_{N} \operatorname{sen}(\theta)
\end{cases} (5.16)$$

A forma conservativa é empregada em trabalhos onde são utilizadas técnicas numéricas como volumes finitos, porém na abordagem dessa tese serão utilizados métodos do tipo elementos finitos que requerem uma forma não-conservativa (primitiva) para representação desse sistema de equações diferenciais parciais.

A forma primitiva requer o isolamento das derivadas temporais das variáveis de estado do modelo. As variáveis de estado a serem adotadas nesta tese serão: (i) fração de área de seção transversal ocupada pelo gás $\alpha_{\scriptscriptstyle G}$, (ii) pressão média da seção transversal P, (iii) vazão mássica da fase líquida $q_{\scriptscriptstyle L}$ e (iv) vazão mássica da fase gás $q_{\scriptscriptstyle G}$.

Fazendo-se as devidas modificações nos termos conservativos da equação (5.16) e aplicando-se a regra da cadeia nos termos diferenciais, obtém-se:

$$\begin{cases}
\rho_{N} \frac{\partial \alpha_{N}}{\partial t} + \alpha_{N} \frac{\partial \rho_{N}}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_{N}}{\partial x} \\
\frac{\partial q_{N}}{\partial t} = -A_{N} \frac{\partial P}{\partial x} - \Delta P_{N} A \frac{\partial \alpha_{N}}{\partial x} - A_{N} \frac{\partial \Delta P_{N}}{\partial x} - \frac{\partial (q_{N} v_{N})}{\partial x} - \Gamma_{N} - \rho_{N} g A_{N} \operatorname{sen}(\theta)
\end{cases} (5.17)$$

Considerando-se as seguintes identidades de derivadas em relação a uma coordenada genérica ξ :

$$\frac{\partial \rho_{N}}{\partial \xi} = \frac{d \rho_{N}}{dP} \frac{\partial P}{\partial \xi} = c_{N} \frac{\partial P}{\partial \xi}
\frac{\partial \Delta P_{N}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Delta P_{N}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta P_{N}}{\partial \alpha_{G}} \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial \xi}$$
(5.18)

onde c_N é a compressibilidade da fase N.

Aplicando-se a regra da cadeia para a derivada do produto entre vazão mássica e velocidade, tem-se:

$$\frac{\partial (q_N v_N)}{\partial x} = 2 v_N \frac{\partial q_N}{\partial x} - A_N v_N^2 c_N \frac{\partial P}{\partial x} - A \rho_N v_N^2 \frac{\partial \alpha_N}{\partial x}$$
 (5.19)

Aplicando-se (5.18) em (5.17) e isolando-se os termos de acúmulo, tem-se:

$$\frac{\partial \alpha_{G}}{\partial t} = r_{G} (A \rho_{L})^{-1} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} - r_{L} (A \rho_{G})^{-1} \frac{\partial q_{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -r_{L} (A \alpha_{L} c_{L})^{-1} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} - r_{G} (A \alpha_{G} c_{G})^{-1} \frac{\partial q_{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial q_{L}}{\partial t} = \begin{pmatrix}
A \left(\Delta P_{L} - \alpha_{L} \frac{\partial \Delta P_{L}}{\partial \alpha_{G}} - \rho_{L} v_{L}^{2} \right) \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial x} + \\
-A_{L} \left(1 - c_{L} v_{L}^{2} + \frac{\partial \Delta P_{L}}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial x} - 2 v_{L} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} + \\
-\Gamma_{L} - \rho_{L} g A \alpha_{L} \operatorname{sen}(\theta)
\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = \begin{pmatrix}
-A \left(\Delta P_{G} + \alpha_{G} \frac{\partial \Delta P_{G}}{\partial \alpha_{G}} - \rho_{G} v_{G}^{2} \right) \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial x} + \\
-A_{G} \left(1 - c_{G} v_{G}^{2} + \frac{\partial \Delta P_{G}}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial x} - 2 v_{G} \frac{\partial q_{G}}{\partial x} + \\
-\Gamma_{G} - \rho_{G} g A \alpha_{G} \operatorname{sen}(\theta)
\end{pmatrix}$$
(5.20)

onde r_L e r_G são definidos como:

$$r_{L} = \frac{\frac{\alpha_{L} c_{L}}{\rho_{L}}}{\frac{\alpha_{G} c_{G}}{\rho_{G}} + \frac{\alpha_{L} c_{L}}{\rho_{L}}}$$
(5.21)

$$r_G = \frac{\frac{\alpha_G c_G}{\rho_G}}{\frac{\alpha_G c_G}{\rho_G} + \frac{\alpha_L c_L}{\rho_L}}$$
(5.22)

Com o objetivo de facilitar a solução numérica já que a pressão nas unidades do SI é cerca de cinco ordens de grandeza superior às demais variáveis de estado, fez-se um escalonamento da pressão em que:

$$P(t,x) = P_R P_T(t,x)$$
 (5.23)

Aplicando-se (5.23) em (5.20), obtém-se:

$$\frac{\partial \alpha_{G}}{\partial t} = \frac{r_{G}}{A \rho_{L}} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} - \frac{r_{L}}{A \rho_{G}} \frac{\partial q_{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_{T}}{\partial t} = -\frac{r_{L}}{A_{L} c_{L} P_{R}} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} - \frac{r_{G}}{A_{G} c_{G} P_{R}} \frac{\partial q_{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial q_{L}}{\partial t} = \begin{pmatrix} A \left(\Delta P_{L} - \alpha_{L} \frac{\partial \Delta P_{L}}{\partial \alpha_{G}} - \rho_{L} v_{L}^{2} \right) \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial x} + \\ -A_{L} P_{R} \left(1 - c_{L} v_{L}^{2} + \frac{\partial \Delta P_{L}}{\partial P} \right) \frac{\partial P_{T}}{\partial x} - 2 v_{L} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} + \\ -\Gamma_{L} - \rho_{L} g A_{L} \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -A \left(\Delta P_{G} + \alpha_{G} \frac{\partial \Delta P_{G}}{\partial \alpha_{G}} - \rho_{G} v_{G}^{2} \right) \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial x} + \\ -A_{G} P_{R} \left(1 - c_{G} v_{G}^{2} + \frac{\partial \Delta P_{G}}{\partial P} \right) \frac{\partial P_{T}}{\partial x} - 2 v_{G} \frac{\partial q_{G}}{\partial x} + \\ -\Gamma_{G} - \rho_{G} g A_{G} \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$
(5.24)

Representado-se o sistema na seguinte forma matricial:

$$\left[\frac{\partial \underline{y}}{\partial t}\right] + \underline{\underline{M}}_{A} \left[\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right] + \underline{\underline{M}}_{B} = \underline{0}$$
 (5.25)

onde o vetor de variáveis de estado do modelo é definido como $\underline{y} = \begin{bmatrix} \alpha_G & P_T & q_L & q_G \end{bmatrix}^T$, a matriz de coeficientes \underline{M}_A de dimensão $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ e o vetor de coeficientes \underline{M}_B de dimensão $\mathbf{4} \times \mathbf{1}$ têm a seguinte forma:

$$\underline{\underline{M}}_{A} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \left[-r_{G}(A\rho_{L})^{-1}\right] & \left[r_{L}(A\rho_{G})^{-1}\right] \\
0 & 0 & \left[r_{L}(P_{R}A_{L}c_{L})^{-1}\right] & \left[r_{G}(P_{R}A_{G}c_{G})^{-1}\right] \\
\left[A_{L}P_{R}\left(\frac{1-v_{L}^{2}c_{L}+1}{2P_{L}}\right)\right] & \left(2v_{L}\right) & 0 \\
\left[A_{L}P_{R}\left(\frac{1-v_{L}^{2}c_{L}+1}{2P_{L}}\right)\right] & \left(2v_{L}\right) & 0 \\
\left[A_{L}P_{R}\left(\frac{1-v_{L}^{2}c_{L}+1}{2P_{L}}\right)\right] & \left(2v_{L}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\Gamma_{L}+\rho_{L}gA_{L}\operatorname{sen}(\theta)\right) & \left(\Gamma_{G}+\rho_{G}gA_{G}\operatorname{sen}(\theta)\right)\right]^{T}$$

$$\underline{\underline{M}}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\Gamma_{L}+\rho_{L}gA_{L}\operatorname{sen}(\theta)\right) & \left(\Gamma_{G}+\rho_{G}gA_{G}\operatorname{sen}(\theta)\right)\right]^{T}$$

5.7 EQUAÇÕES DE ESTADO

Para relacionar a massa específica das fases com as variáveis de estado do sistema de equações é necessário utilizar uma relação termodinâmica. A premissa de escoamento politrópico adotada para o modelo permite a formulação de equações de estado dependentes apenas da pressão. Uma relação simplificada baseada no coeficiente politrópico pode ser descrita como:

$$\frac{P_{N}(t_{1},x_{1})}{\rho_{N}(t_{1},x_{1})^{\gamma}} = \frac{P_{N}(t_{2},x_{2})}{\rho_{N}(t_{2},x_{2})^{\gamma}}$$
(5.27)

Utilizando-se um estado de referência P_{N0} e ρ_{N0} , obtém-se a relação termodinâmica entre a massa específica e a pressão da fase:

$$\rho_{N}(t,x) = \frac{\rho_{N0}}{P_{N0}^{\frac{1}{N_{N}}}} (P_{N}(t,x))^{\frac{1}{N_{N}}}$$
(5.28)

Uma outra relação de importância para o modelo de escoamento é a derivada da massa específica em relação à pressão que pode ser obtida diretamente através da expressão (5.28).

$$\frac{d \rho_{N}(t,x)}{d P_{N}} = \frac{1}{\gamma_{N}} \left(\frac{\rho_{N0}}{P_{N0}^{\frac{1}{\gamma_{N}}}} \right) \left(P_{N}(t,x) \right)^{\frac{1}{\gamma_{N}}-1} = \frac{\rho_{N}(t,x)}{\gamma_{N} P_{N}(t,x)}$$
(5.29)

5.8 FECHAMENTO DO MODELO

O modelo de escoamento descrito em (5.25) e (5.26) possui termos de fechamento $\vartheta_P\left(\alpha_G, P_T, q_L, q_G\right)$, como diferenças entre a pressão das fases e a pressão média $(\Delta P_L, \Delta P_G)$, diferença entre a pressão da interface e a pressão média (ΔP_I) e os termos dissipativos $(\Gamma_L$ e Γ_G). Esses termos são funções das variáveis de estado, da geometria do duto, das propriedades dos fluidos e do padrão de escoamento.

Sendo assim, é necessário apresentar um formalismo para fechamento do modelo que:

- a) determine a geometria para cada padrão de escoamento;
- b) determine os termos dissipativos para cada padrão de escoamento;
- c) determine os termos de diferença de pressão para cada padrão de escoamento;
- d) utilize uma metodologia de identificação do padrão de escoamento capaz de ponderar os termos de fechamento para cada padrão de escoamento.

Por meio dessa metodologia é possível desenvolver um modelo de escoamento para diferentes padrões de escoamento que utiliza uma ponderação entre os termos de fechamento para escoamento estratificado, anular, bolhas e intermitente:

$$\vartheta = \sum_{p} f l_p \vartheta_p \tag{5.30}$$

onde $fl_P \in \mathbb{R}$, $fl_P \in [0,1]$ e $P \in \{ES, AN, BO, IN\}$.

As ponderações fl_{ES} , fl_{AN} , fl_{BO} e fl_{IN} , são funções indicadoras de padrão de escoamento e podem ser compreendidas como frações de comprimento onde o escoamento pode ser modelado segundo padrão estratificado, anular, bolhas e intermitente, respectivamente, que serão apresentadas detalhadamente na Subseção 5.13.4.

5.9 FECHAMENTO PARA PADRÃO ESTRATIFICADO

5.9.1 Geometria para padrão estratificado

Para o padrão de escoamento do tipo estratificado, as duas fases estão separadas por uma interface paralela à direção horizontal, conforme apresentado na Figura 5.2:

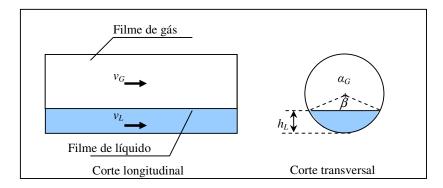


Figura 5.2. Geometria do escoamento estratificado

Três variáveis podem ser utilizadas para a identificação da geometria: espessura máxima da camada de líquido (h_L), o ângulo de contato entre a fase líquida e a parede ou ângulo de molhamento (β) e a fração de área de gás (α_G). A Figura 5.3 e as equações a seguir relacionam geometricamente essas três variáveis (Taitel e Barnea, 1976):

$$\frac{h_L}{D} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \tag{5.31}$$

$$\beta = sen(\beta) + 2\pi (1 - \alpha_G) \tag{5.32}$$

Os perímetros de contato líquido-parede, gás-parede e interface em função do ângulo de contato são mostrados na Equação (5.33):

$$K_{L} = \frac{\beta D}{2}$$

$$K_{G} = (2\pi - \beta)D$$

$$K_{I} = Dsen\left(\frac{\beta}{2}\right)$$
(5.33)

A Figura 5.4 descreve os perímetros de contato em função da espessura máxima da camada de líquido e em função da fração de área.

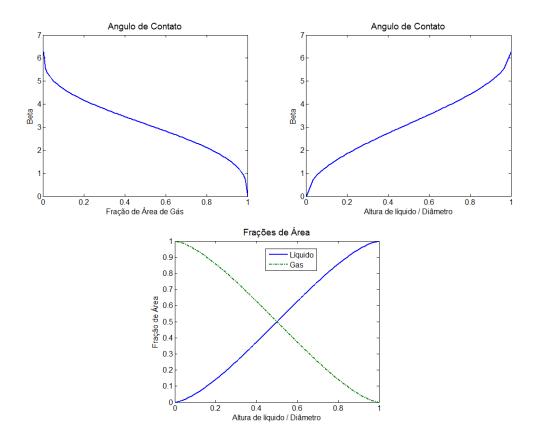


Figura 5.3. Ângulo de contato, altura máxima da camada de líquido e frações de área de gás e líquido

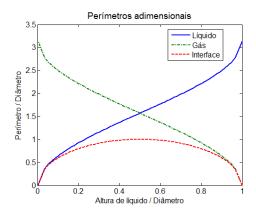


Figura 5.4. Perímetros de contato

A derivada da área de seção preenchida pelo líquido (A_L) em relação à altura máxima da camada de líquido (h_L) , utilizada na análise de estabilidade do escoamento estratificado, corresponde a (Taitel e Barnea, 1976):

$$\frac{dA_L}{dh_L} = D \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = K_I \tag{5.34}$$

5.9.2 Termos dissipativos

O termo dissipativo Γ_N , que corresponde à força por unidade de comprimento de duto, pode ser escrito como a soma entre a interação fase-parede e a interação entre as fases:

$$\Gamma_N = \tau_N K_N + \tau_{I,N} K_I \tag{5.35}$$

Esse modelo será adotado para todos os padrões de escoamento considerados nessa tese.

Interação fase-parede

As tensões de cisalhamento das fases N (líquida e gás) são definidas segundo fatores de atrito de Fanning através das relações a seguir:

$$\tau_{N} = f_{N} \frac{\rho_{N} |v_{N}| v_{N}}{2} \tag{5.36}$$

O fator de atrito da fase pela interação com a parede pode ser obtido através de correlação para escoamento de uma fase como, por exemplo, a equação de Colebrook-White, Colebrook (1939), para Re > 4000:

$$\frac{1}{\sqrt{f_N}} = -4\log\left(\frac{\varepsilon}{3.715D} + \frac{2.51}{\operatorname{Re}_N \sqrt{f_N}}\right)$$
 (5.37)

Para a solução do escoamento bifásico estacionário estratificado, ver Apêndice V – Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976), é interessante a utilização de uma relação simplificada para o fator de atrito em função do número de Reynolds:

$$f_{N} = CRe_{N}^{-n}$$
onde:
$$C = \begin{cases} 0.046 & \text{, se regime turbulento} \\ 16 & \text{, se regime laminar} \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} 0.2 & \text{, se regime turbulento} \\ 1 & \text{, se regime laminar} \end{cases}$$
(5.38)

A determinação do fator de atrito através de uma equação implícita requer esforço computacional excessivo. Sendo assim, foram utilizadas nesse trabalho correlações explícitas

como as proposta por Churchill (1977) e por Haaland (1983). A correlação de Churchill é mostrada a seguir:

$$f_{N} = 2\left[\left(\frac{8}{\text{Re}_{N}}\right)^{12} + \frac{1}{\left(a_{N} + b_{N}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_{N} = \left[2.457 \cdot \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{7}{\text{Re}_{N}}\right)^{0.9} + 0.27\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)}\right)\right]^{16}$$

$$b_{N} = \left(\frac{37530}{\text{Re}_{N}}\right)^{16}$$
(5.39)

A correlação proposta por Haaland (1983), bastante encontrada nos trabalhos de escoamento bifásico, corrigida para determinação do fator de *Fanning*, é descrita na forma explícita como:

$$\frac{1}{\sqrt{f_N}} = -3.6\log_{10}\left(\frac{6.9}{\text{Re}_N} + \left(\frac{\varepsilon}{3.7D}\right)^{1.11}\right)$$
 (5.40)

A utilização dessas correlações no escoamento bifásico requer a definição do número de Reynolds de cada fase:

$$Re_{L} = \frac{D_{h,L}v_{L}\rho_{L}}{\mu_{L}}$$

$$Re_{G} = \frac{D_{h,G}v_{G}\rho_{G}}{\mu_{G}}$$
(5.41)

onde os diâmetros hidráulicos das fases são definidos como (Taitel e Barnea, 1976):

$$D_{h,L} = \frac{4A_L}{K_L}$$

$$D_{h,G} = \frac{4A_G}{K_G + K_L}$$
(5.42)

A Figura 5.5 apresenta os valores de fator de atrito calculados através da correlação de Churchill (1977) para diferentes valores de rugosidade específica e as retas limítrofes utilizadas por Taitel (1986) para regime laminar e regime turbulento.

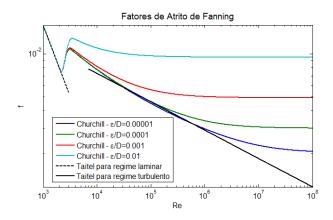


Figura 5.5. Fatores de atrito de Fanning

A Figura 5.6 compara os valores de fator de atrito calculados através da correção de Churchill (1977) com os calculados por Haaland (1983) e Colebrook (1939) para rugosidade relativa de 0.001. É possível verificar que a correlação de Churchill é capaz de prever o fator de atrito tanto para a faixa de número de Reynolds laminar quanto para turbulento. Assim, essa correlação será utilizada nessa tese para a modelagem do fator de atrito de *Fanning*.

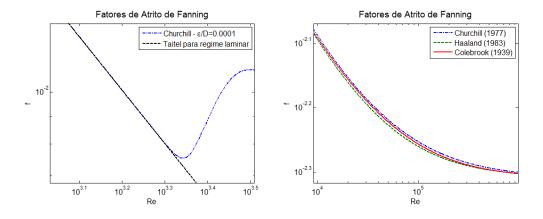


Figura 5.6. Comparação entre as correlações

<u>Interação entre as fases</u>

A interação entre fases contínuas é definida através de tensões de cisalhamento utilizando fatores de atrito através das relações a seguir:

$$\tau_{I,L} = -f_I \frac{\rho_G |v_G - v_L| (v_G - v_L)}{2}$$

$$\tau_{I,G} = -\tau_{I,L}$$
(5.43)

O fator de atrito interfacial tem crucial importância na modelagem do escoamento estratificado conforme apresentado nos trabalhos de Andritsos e Hanratty (1987).

A relação mais simples para modelagem do fator de atrito na interface para escoamento estratificado suave e ondulado, utilizada no trabalho de Taitel e Dukler (1976), considera que o fator de atrito na interface gás-líquido é igual ao fator de atrito da fase gás.

$$f_I = f_G \tag{5.44}$$

Nesta tese será utilizada a correlação desenvolvida por Andritsos et al (1987) que conforme descrito por Omgba-Essama (2004) gera resultados adequados tanto para escoamentos estratificados suaves como estratificado com ondas.

$$f_I = f_G$$
, para $v_{S,G} \le 5$ m/s
 $f_I = f_G \left(1 + 15 \left(\frac{v_{S,G}}{5} - 1 \right) \left(\frac{h_L}{D} \right)^{0.5} \right)$, para $v_{S,G} > 5$ m/s

A Figura 5.7 descreve a razão entre f_I e f_G em função da velocidade superficial do gás para diferentes alturas de líquido:

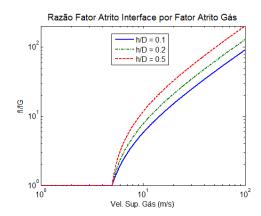


Figura 5.7. Razão entre fatores de atrito de interface e da fase gás para escoamento estratificado

5.9.3 Termos de correção da pressão

A seguir, é apresentado o desenvolvimento para a obtenção dos termos de correção das pressões médias das fases (ΔP_N) em padrão de escoamento estratificado utilizando-se como hipótese o equilíbrio hidrostático ao longo da seção transversal do duto.

Definindo-se a pressão média ao longo da seção transversal P, como uma média ponderada pelas frações de área das pressões médias na fase gás e na fase líquida, respectivamente, P_L e P_G , tem-se:

$$P(t,x) = \alpha_L(t,x)P_L(t,x) + \alpha_G(t,x)P_G(t,x)$$
(5.46)

sendo:

$$\Delta P_L(t,x) = P_L(t,x) - P(t,x)$$

$$\Delta P_G(t,x) = P_G(t,x) - P(t,x)$$
(5.47)

Utilizando-se um referencial cartesiano conforme a Figura 5.8:

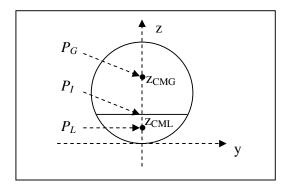


Figura 5.8. Referencial para determinação da diferença de pressão no escoamento estratificado

Desconsiderando-se efeitos de tensões superficiais, utilizou-se como referência a pressão da interface P_I e os centros de massa das fases (z_{CML} e z_{CMG}) em relação à cota mínima da seção transversal do tubo, para modelar as pressões médias das fases, conforme apresentado em (5.48).

$$\Delta P_L(t,x) = \Delta P_I(t,x) + \rho_L g\left(h_L(t,x) - z_{CML}(t,x)\right)\cos(\theta)$$

$$\Delta P_G(t,x) = \Delta P_I(t,x) + \rho_G g\left(h_L(t,x) - z_{CMG}(t,x)\right)\cos(\theta)$$
(5.48)

onde a expressão para a diferença de pressão na interface é dada por (Masella et al., 1998):

$$\Delta P_{I}(t,x) = P_{I}(t,x) - P(t,x) = \begin{pmatrix} \alpha_{L}(t,x)\rho_{L}(z_{CML}(t,x) - h_{L}(t,x)) + \\ +\alpha_{G}(t,x)\rho_{G}(z_{CMG}(t,x) - h_{L}(t,x)) \end{pmatrix} g\cos(\theta)$$
 (5.49)

As cotas dos centros de massa, z_{CML} e z_{CMG} , são obtidas pelas seguintes formas integrais:

$$z_{CML} = \frac{D}{2} + \frac{\iint\limits_{A_{L}(t)} z \, dy \, dz}{\iint\limits_{A_{L}(t)} 1 \, dy \, dz}$$

$$z_{CMG} = \frac{D}{2} + \frac{\iint\limits_{A_{G}(t)} z \, dy \, dz}{\iint\limits_{A_{L}(t)} 1 \, dy \, dz}$$
(5.50)

que possuem a seguinte solução, conforme descrito detalhadamente no Apêndice II – Determinação dos Centros de Massa para Escoamento Estratificado:

$$z_{CML} = D\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi\alpha_L} sen^3\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$z_{CMG} = D\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi\alpha_G} sen^3\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$
(5.51)

A Figura 5.9 descreve as razões entre os centros de massa de cada fase pelo diâmetro do duto, z_{CML}/D e z_{CMG}/D , em função da fração de área de gás (α_G) e em função da espessura máxima da camada de líquido (h_L).

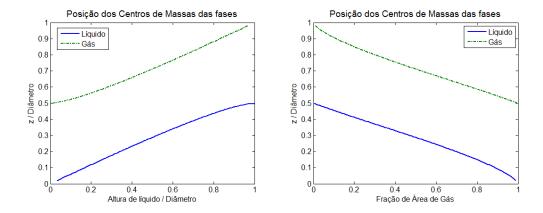


Figura 5.9. Cota do centro de massa das fases em relação ao ponto inferior da seção transversal do tubo

A Figura 5.10 descreve o comportamento da diferença de pressão da fase líquida em relação à pressão média na forma adimensional em função da fração de área de gás e em função da espessura da camada de líquido para massa específica da fase líquida igual a 1000 kg/m³ e massas específicas da fase gás iguais a 1, 100 e 250 kg/m³, tal que, $\Delta P_L *= \Delta P_L /(\rho_L g D)$:

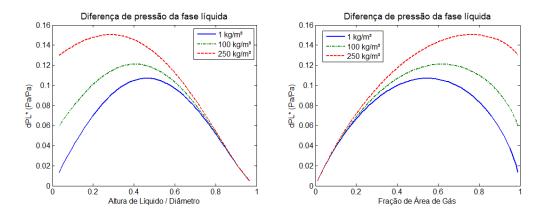


Figura 5.10. Diferença de pressão da fase líquida (adimensional)

A Figura 5.11 descreve o comportamento da diferença de pressão da fase gás em relação à pressão média na forma adimensional em função da fração de área de gás e em função da espessura da camada de líquido para massa específica da fase líquida igual a 1000 kg/m³ e massas específicas da fase gás iguais a 1, 100 e 250 kg/m³, tal que, $\Delta P_G^* = \Delta P_G / (\rho_L g D)$:

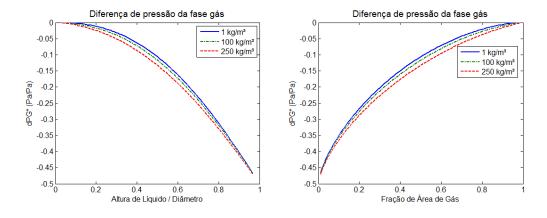


Figura 5.11. Diferença de pressão da fase gás (adimensional)

Tomando-se as derivadas de (5.47) em relação à pressão, tem-se:

$$\frac{\partial \Delta P_L}{\partial P} = (1 - \alpha_L) \frac{\partial \Delta P_{LG}}{\partial P}
\frac{\partial \Delta P_G}{\partial P} = -(1 - \alpha_G) \frac{\partial \Delta P_{LG}}{\partial P}$$
(5.52)

$$\frac{\partial \Delta P_{LG}}{\partial P} = \left(\left(\frac{\partial \rho_L}{\partial P} - \frac{\partial \rho_G}{\partial P} \right) h_L(t, x) - \frac{\partial \rho_L}{\partial P} z_{CML}(t, x) + \frac{\partial \rho_G}{\partial P} z_{CMG}(t, x) \right) g \cos(\theta)$$

onde $\Delta P_{LG} = \Delta P_L - \Delta P_G$.

Tomando-se as derivadas de (5.47) em relação à fração de área de gás, tem-se:

$$\frac{\partial P_L}{\partial \alpha_G} = \left(1 - \alpha_L\right) \frac{\partial \Delta P_{LG}}{\partial \alpha_G} + \Delta P_{LG}$$

$$\frac{\partial P_G}{\partial \alpha_G} = -\left(1 - \alpha_G\right) \frac{\partial \Delta P_{LG}}{\partial \alpha_G} + \Delta P_{LG}$$
(5.53)

onde:

$$\frac{\partial \Delta P_{LG}}{\partial \alpha_{G}} = \left((\rho_{L} - \rho_{G}) \frac{dh_{L}}{d\alpha_{G}} - \rho_{L} \frac{\partial z_{CML}}{\partial \alpha_{G}} + \rho_{G} \frac{\partial z_{CMG}}{\partial \alpha_{G}} \right) g \cos(\theta)$$

$$\frac{dh_{L}}{d\alpha_{L}} = -\frac{1}{2} sen \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{d\beta}{d\alpha_{G}}$$

$$\frac{dh_{L}}{d\alpha_{G}} = \frac{1}{2} sen \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{d\beta}{d\alpha_{G}}$$

$$\frac{\partial z_{CML}}{\partial \alpha_{G}} = -\frac{D}{2\pi\alpha_{L}} sen^{2} \left(\frac{\beta}{2} \right) \left[\frac{2}{3\alpha_{L}} sen \left(\frac{\beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{d\beta}{d\alpha_{G}} \right]$$

$$\frac{\partial z_{CMG}}{\partial \alpha_{G}} = -\frac{D}{2\pi\alpha_{G}} sen^{2} \left(\frac{\beta}{2} \right) \left[\frac{2}{3\alpha_{G}} sen \left(\frac{\beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{d\beta}{d\alpha_{G}} \right]$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha_{G}} = \frac{2\pi}{\cos(\beta) - 1}$$
(5.54)

De Henau e Raithby (1995a) desenvolveram termos de correção de pressão simplificados que consideram que a pressão média P é igual à pressão média na interface P_I :

$$\Delta P_{L} = \rho_{L} g D \cos \theta \left(-\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) + \frac{1}{3\pi \alpha_{L}} sen^{3} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right)$$

$$\Delta P_{G} = -\rho_{G} g D \cos \theta \left(\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) + \frac{1}{3\pi \alpha_{G}} sen^{3} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right)$$
(5.55)

porém essas expressões não foram utilizadas nessa tese.

5.10 FECHAMENTO PARA PADRÃO ANULAR

5.10.1 Geometria para padrão anular

Para o padrão de escoamento do tipo anular, a fase líquida está em contato com toda a parede do duto $(\beta = 2\pi)$ em torno da fase gasosa, conforme apresentado na Figura 5.12:

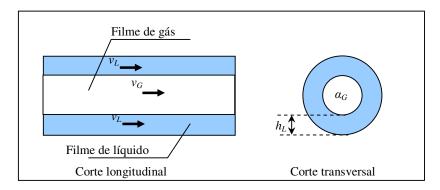


Figura 5.12. Geometria do escoamento anular

A espessura da camada de líquido pode ser determinada através da seguinte equação (Taitel e Dukler, 1976):

$$\frac{h_L}{D} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\alpha_G} \right) \tag{5.56}$$

Os perímetros em função da fração de área de gás α_G são:

$$K_{L} = \pi D$$

$$K_{G} = 0$$

$$K_{I} = \pi D \sqrt{\alpha_{G}}$$
(5.57)

A Figura 5.13 descreve a relação entre fração de área de gás (α_G) e de líquido (α_L) e a altura da camada anular de líquido (h_L) :

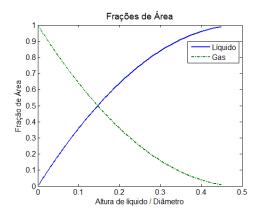


Figura 5.13. Fração de área de gás para escoamento anular

5.10.2 Termos dissipativos

A modelagem da interação entre fase e parede para o escoamento anular é idêntica à utilizada para padrão estratificado, ver Equação (5.35).

A relação mais simples para modelagem do fator de atrito da interface para escoamento anular foi proposta por Wallis (1987):

$$f_I = 0.005 \left(1 + 300 \frac{h_L}{D} \right) \tag{5.58}$$

Nessa tese será utilizado o fator de atrito de interface para padrão anular obtido por Fore et al. (2000) através da combinação de dados experimentais de diferentes trabalhos como Fore e Dukler (1995) e Asali (1984):

$$f_I = f_G \left(1 + 300 \left(\left(1 + \frac{17500}{\text{Re}_G} \right) \frac{h_L}{D} - 0.0015 \right) \right)$$
 (5.59)

A Figura 5.14 descreve a razão entre f_I e f_G em função da velocidade superficial do gás para diferentes espessuras da película anular segundo Fore et al. (2000):

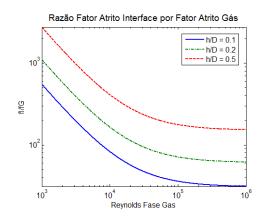


Figura 5.14. Razão entre fatores de atrito de interface e da fase gás para escoamento anular

5.10.3 Termo de correção de pressão

Para o escoamento anular, os termos de correção de pressão (ΔP_L e ΔP_G) podem ser desprezados, já que a espessura da camada de líquido (h_L) assume valores baixos, normalmente da ordem de 10% do valor do diâmetro da tubulação.

5.11 FECHAMENTO PARA PADRÃO BOLHAS

5.11.1 Geometria para padrão bolhas:

Para o padrão de escoamento do tipo bolhas, a fase líquida está em contato com toda a parede do duto $(\beta = 2\pi)$ e a fase gasosa está dispersa na forma de bolhas, conforme apresentado na Figura 5.15:

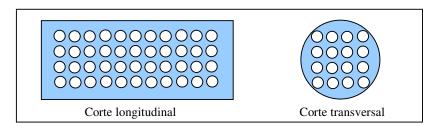


Figura 5.15. Geometria do padrão bolhas

Considerando um diâmetro médio de bolha (d_b) , pode-se determinar os perímetros em função da fração de área de gás são:

$$K_{L} = \pi D$$

$$K_{G} = 0$$

$$K_{I} = \frac{\pi D^{2} \alpha_{G}}{d_{h}}$$
(5.60)

Considerando-se a hipótese de baixas velocidades para a fase dispersa pode-se calcular um diâmetro aproximado de bolhas a partir da equação de estabilidade de Taylor:

$$d_b = \min \left(d_{\text{max}}, \left(\frac{16\sigma}{g(\rho_L - \rho_G)} \right)^{0.5} \right)$$
 (5.61)

onde o diâmetro máximo das bolhas (d_{max}) é descrito por Dukler e Taitel (1986) como:

$$d_{\text{max}} = \left[0.725 + 4.15 \left(\frac{v_{S,G}}{v_M} \right)^{0.5} \right] \left(\frac{\sigma}{\rho_L} \right)^{3/5} \left(2 \frac{f_M v_M^3}{D} \right)^{-2/5}$$
 (5.62)

onde a velocidade da mistura (v_M) é definida como a soma das velocidades supeficiais $v_{S,L}$ e $v_{S,G}$.

5.11.2 Termos dissipativos

<u>Interação fase-parede</u>

Para o caso de escoamentos em regime bolhas, em que a fase líquida corresponde à fase contínua e a fase gas corresponde à fase dispersa, as tensões de cisalhamento devido à interação entre as fases e a parede do tubo são dadas por:

$$\tau_L = f_M \frac{\rho_L |v_M| v_M}{2}$$

$$\tau_G = 0$$
(5.63)

<u>Interação entre as fases</u>

A interação entre a fase contínua e a fase dispersa é definida através das seguintes tensões interfaciais:

$$\tau_{I,L} = -f_I \frac{\rho_L |v_b| v_b}{2}$$

$$\tau_{I,G} = -\tau_{I,L}$$
(5.64)

onde o fator de atrito é definido em termos do coeficiente de arraste conforme apresentado por Masella (1997):

$$f_{I} = \frac{3}{2} \frac{\alpha_{G} \rho_{L} C_{D}}{d_{b}}$$

$$C_{D} = \frac{4}{3} g \frac{(\rho_{L} - \rho_{G})}{\rho_{L}} \frac{d_{b}}{v_{b}^{2}}$$
(5.65)

A velocidade das bolhas pode ser calculada considerando regime turbulento através do seguinte modelo simplificado (Masella, 1997):

$$v_b = \left(0.51d_b + 2.14d_b^{-1}\right)^{0.5} \tag{5.66}$$

5.11.3 Termos de correção da pressão

Os termos de correção de pressão para o escoamento disperso são utilizados como termos de estabilização de modelos a dois fluidos e em alguns trabalhos são substituídos pelo termo de massa virtual.

Drew e Passman (1999) apresentaram um estudo detalhado das relações de fechamento de modelos de escoamento em regime bolhas e propuseram a seguinte relação:

$$\Delta P_L = \xi \rho_L (v_G - v_L) |v_G - v_L|$$

$$\Delta P_G = 0$$

$$\xi = \frac{1}{4}$$
(5.67)

As derivadas dos termos de correção de pressão em relação às variáveis de estado primitivas do modelo de escoamento são:

$$\frac{\partial \Delta P_L}{\partial P} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta P_L}{\partial \alpha_G} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta P_L}{\partial q_L} = \frac{2\Delta P_L}{q_L}$$

$$\frac{\partial \Delta P_L}{\partial q_G} = -\frac{2\Delta P_L}{q_G}$$

$$\frac{\partial \Delta P_G}{\partial \alpha_G} = \frac{\partial \Delta P_G}{\partial P} = \frac{\partial \Delta P_G}{\partial q_L} = \frac{\partial \Delta P_G}{\partial q_G} = 0$$
(5.68)

5.12 FECHAMENTO PARA PADRÃO INTERMITENTE

5.12.1 Geometria para regime intermitente:

Para o regime de escoamento intermitente é necessário descrever detalhadamente a geometria dos *slugs* (pistões de mistura contendo líquido e gás), conforme apresentado na Figura 5.16.

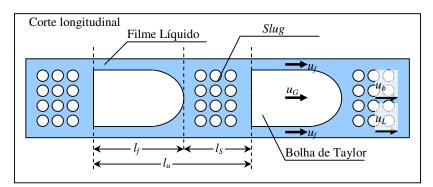


Figura 5.16. Geometria do escoamento intermitente com filme estratificado

Uma unidade de slug possui comprimento l_u e é formada por duas regiões distintas:

a) região de slug: consiste do escoamento de um pistão de líquido contendo bolhas dispersas. Essa região possui fração de área de gás α_s e velocidade do líquido e do gás são dadas por u_L e u_b . Os perímetros em função da fração de área de gás na região de slug são obtidos através das seguintes correlações (idênticas às apresentadas para padrão bolhas, ver Subseção 5.11.1):

$$K_{L,s} = \pi D$$

$$K_{G,s} = 0$$

$$K_{I,s} = \frac{\pi D^2 \alpha_s}{d_b}$$
(5.69)

b) região de filme: consiste de uma grande bolha alongada (bolha de Taylor) e por um filme de líquido escoando de forma estratificada. Essa região possui fração de área de gás α_f , ângulo de molhamento β_f e velocidade do líquido e do gás são dadas por u_f e u_G . A determinação da geometria na região de filme não é trivial devido à variação da altura de líquido ao longo do comprimento. Essa complicação gera a necessidade de resolver um balanço de massa e momento através de equações diferenciais dentro da zona de filme. A título de simplificação, nessa tese será considerada uma altura média de filme (h_f) ao longo de toda essa região e um ângulo de molhamento médio (β_f) descrito na Equação (5.70). Os perímetros dentro da região de filme podem ser obtidos pelas relações descritas na Equação (5.71) (semelhantes às apresentadas para o padrão estratificado, ver Subseção 5.9.1):

$$\beta_f = sen(\beta_f) + 2\pi (1 - \alpha_f)$$
 (5.70)

$$K_{L,f} = \frac{\beta_f D}{2}$$

$$K_{G,f} = (2\pi - \beta_f) D$$

$$K_{I,f} = D \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_f}{2}\right)$$
(5.71)

5.12.2 Velocidade translacional do slug

A velocidade translacional da unidade de *slug* pode ser modelada através da seguinte relação para uma bolha de Taylor:

$$u_t = C v_M + u_d (5.72)$$

onde o coeficiente C é maior que 1 e está relacionado ao perfil de velocidades a jusante da bolha de Taylor. Segundo Bendiksen (1984), o valor do fator C é de 1.2 para regime turbulento e de 2 para regime laminar. Nessa tese será considerado um valor fixo de 1.2 independente do número de Reynolds, onde v_M corresponde à velocidade da mistura definida como a soma das velocidades superficiais de líquido e de gás, $v_{S,L}$ e $v_{S,G}$:

$$v_{M} = v_{S,L} + v_{S,G} (5.73)$$

A velocidade de propagação das bolhas em um líquido estagnado, u_d , foi modelada por Bendiksen (1984) por meio da seguinte equação:

$$u_d = \sqrt{gD} \left(0.35 \operatorname{sen}\theta + 0.54 \cos \theta \right) \tag{5.74}$$

5.12.3 Comprimento do slug

O comprimento do slug (l_s) é um importante parâmetro de projeto em oleodutos, principalmente para o projeto dos equipamentos de separação. O comprimento do slug está bastante correlacionado com a frequência dos slugs.

Dunkler e Hubbard (1975) e, posteriormente, Dukler et al. (1985), através de experimentos com tubulações de 38 mm, determinaram que o comprimento dos *slugs* é de aproximadamente 12 a 30 vezes o diâmetro da tubulação e, além disso, é pouco sensível a variações nas vazões de gás e de líquido.

Scott et al. (1986) identificaram que os valores de 12 a 30 vezes o diâmetro da tubulação para o comprimento do *slug* são subestimados para o caso diâmetros superiores (0.4 a 0.6 m) onde podem ser observados *slugs* de cerca de 300 diâmetros.

Norris (1982), baseado em testes no campo de *Prudhoe Bay*, desenvolveu a seguinte expressão:

$$\ln(l_s) = -3.287 + 4.589 \left[\ln \left(\frac{D}{0.0254} \right) \right]^{0.5}$$
 (5.75)

Gordon e Fairhust (1986) confirmaram a qualidade da expressão determinada por Norris (1982) em testes com tubulações de diâmetros de 0.3 a 0.6 m.

Nessa tese, será utilizada uma combinação entre as relações obtidas por Dukler et al. (1985) e Norris (1982):

$$l_{s} = \begin{cases} \exp\left(-3.287 + 4.589 \left[\ln\left(\frac{D}{0.0254}\right)\right]^{0.5}\right), \text{ se } D > 0.038 \text{ m} \\ 18.1D, \text{ se } D \le 0.038 \text{ m} \end{cases}$$
 (5.76)

5.12.4 Fração de área de gás no slug e na bolha de Taylor

A fração de área de gás no slug (α_s) é calculada nessa tese pela relação descrita por Barnea e Brauner (1985) que consideram que a fração de área de gás no slug corresponde à mesma fração para o caso do escoamento com padrão bolhas:

$$\alpha_{s} = 0.058 \left(2 \left(0.4 \frac{\sigma}{(\rho_{L} - \rho_{G}) g} \right)^{0.5} \left(2 \frac{f_{s}}{D} v_{M}^{3} \right)^{2/5} \left(\frac{\rho_{L}}{\sigma} \right)^{3/5} - 0.725 \right)^{2}$$
 (5.77)

onde o fator de atrito de *Fanning* para o *slug* (f_s) é obtido via (5.39) a partir do número de Reynolds do *slug* definido como:

$$Re_{S} = \frac{\rho_{L}u_{S}D}{\mu_{L}} \tag{5.78}$$

Outra possibilidade é a correlação desenvolvida por Gómez (2000) para predição da fração de área de gás no *slug* baseada apenas no número de Reynolds do *slug* e válida para escoamento ascendente:

$$\alpha_s = 1 - \exp(-0.45\theta - 2.48 \, 10^{-6} \, Re_s)$$
 (5.79)

A fração de área de gás na bolha de Taylor média ($\bar{\alpha}_f$) é obtida pelo balanço de massa na unidade de *slug*:

$$\alpha_f = \frac{l_u}{l_f} \alpha_G - \frac{l_s}{l_f} \alpha_s \tag{5.80}$$

5.12.5 Velocidades locais

Do balanço de massa das fases dentro da região de *slug* é possível obter a velocidade das bolhas (u_b) e a velocidade do líquido (u_L) dentro do *slug*:

$$u_{L} = \frac{v_{S,L} + u_{t} (\alpha_{G} - \alpha_{s})}{1 - \alpha_{s}}$$

$$u_{b} = \frac{v_{S,G} - u_{t} (\alpha_{G} - \alpha_{s})}{\alpha_{s}}$$
(5.81)

Do balanço de massa das fases dentro da região da bolha de Taylor é possível obter as velocidades do gás na bolha de Taylor (u_G) e do líquido no filme (u_f):

$$u_f = u_t + \frac{1 - \alpha_s}{1 - \alpha_f} (u_L - u_t)$$

$$u_G = u_t + \frac{\alpha_s}{\alpha_f} (u_b - u_t)$$
(5.82)

5.12.6 Comprimento da unidade de slug

Manolis (1995) desenvolveu o seguinte modelo empírico para a frequência dos *slugs* (w_s) :

$$w_{s} = \frac{v_{S,G}}{D} \left(0.0323 \frac{v_{S,L}}{v_{S,G}} \sqrt{\frac{\rho_{L}}{\rho_{L} - \rho_{G}}} \frac{f_{S,L}^{-0.5}}{2E_{O}^{0.2}} \right)^{n}$$

$$n = 0.85 + \frac{260\mu_{L}}{D^{1.5} \sqrt{\rho_{L} \Delta \rho g}}$$
(5.83)

onde o número de Eötvös é definido como $E_o = D\sqrt{\frac{g\left(\rho_{\scriptscriptstyle L} - \rho_{\scriptscriptstyle G}\right)}{\sigma}}$.

A partir da frequência dos *slugs* pode-se obter o comprimento da unidade de *slug* através da velocidade translacional:

$$l_u = \frac{u_t}{w_c} \tag{5.84}$$

5.12.7 Termos dissipativos e de correção de pressão

A partir das velocidades locais u_f , u_G , u_b e u_L e das geometrias das regiões de filme e de slug são utilizadas as mesmas relações de fechamento para escoamento estratificado e escoamento bolhas, respectivamente. Os termos de fechamento para o padrão intermitente, θ_{IN} , que correspondem a termos de correção da pressão e dissipativos, são obtidos através de uma média ponderada pelos comprimentos das regiões:

$$\vartheta_{IN}\left(\alpha_{G}, P_{T}, q_{L}, q_{G}\right) = \frac{l_{f}}{l_{u}}\vartheta_{ES}\left(\alpha_{f}, P_{T}, q_{L,f}, q_{G,f}\right) + \frac{l_{s}}{l_{u}}\vartheta_{BO}\left(\alpha_{s}, P_{T}, q_{L,s}, q_{G,s}\right)$$
(5.85)

onde as vazões mássicas dentro das regiões de slug são dadas por:

$$q_{L,f} = \rho_L u_f A (1 - \alpha_f)$$

$$q_{G,f} = \rho_G u_G A \alpha_f$$

$$q_{L,s} = \rho_L u_L A (1 - \alpha_s)$$

$$q_{G,s} = \rho_G u_b A \alpha_s$$
(5.86)

5.13 IDENTIFICAÇÃO DO PADRÃO DE ESCOAMENTO

Os termos dissipativos dos modelos de escoamento multifásico apresentados dependem fortemente do padrão de escoamento. Os modelos são altamente não-lineares e descontínuos, provocando grande instabilidade numérica. Desta forma, é importante que as correlações para a previsão do padrão de escoamento sejam confiáveis e com validade para grandes variações de propriedades físicas, condições de escoamento e geometria dos dutos, além de possibilitar uma transição suave entre os padrões de escoamento.

A metodologia de identificação de padrão de escoamento (IPE) utilizada nesta tese aplica conceitos desenvolvidos por diferentes autores (Taitel e Dukler, 1976; Taitel et al., 1980; Barnea et al., 1982a, 1982b. Barnea e Brauner, 1985; Dukler e Taitel, 1986; Barnea, 1987) foi consolidada por Oleimans e Pots em Crowe (2006).

O ângulo de inclinação da tubulação (θ) é um parâmetro significativo na determinação do padrão de escoamento e está sendo considerado na metodologia utilizada. Cabe ressaltar que a maioria dos trabalhos experimentais é focada no estudo de dutos horizontais, quase-horizontais, verticais ou quase-verticais, havendo ainda uma significativa falta de dados para ângulos intermediários.

O procedimento de IPE utiliza uma lógica baseada em uma árvore de decisões com a seguinte sequência de busca: Estratificado, Anular, Bolhas e Intermitente. Os passos do procedimento estão descritos a seguir de maneira simplificada:

- a) Passo 1: Inicialmente assume-se regime estratificado;
- b) Passo 2: Calcula-se a fração de área de gás para padrão estratificado, $\alpha_{G,Taitel}$, utilizando-se o modelo descrito no Apêndice V Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976);
- c) Passo 3: Verifica-se se o regime estratificado é possível e estável através do mecanismo de transição entre estratificado e não-estratificado, caso o escoamento estratificado seja estável, determina-se a presença ou não de ondas na superfície da interface;
- d) Passo 4: Caso estratificado não seja possível, identifica-se a possibilidade de escoamento anular através do mecanismo de transição entre estratificado e anular;
- e) Passo 5: Calcula-se a fração de área de gás para padrão anular, $\alpha_{G,Pots}$, utilizando-se o modelo descrito no Apêndice VI Modelo Estacionário Anular de Pots (1985);
- f) Passo 6: Caso anular não seja possível, assume-se regime de bolhas;
- g) Passo 7: Calcula-se a fração de área de gás para padrão bolhas, $\alpha_{G,Zuber}$, utilizando a correlação descrita por Zuber e Findlay (1965);
- h) Passo 8: Verifica-se a estabilidade do regime de bolhas utilizando o modelo de escoamento disperso;
- i) Passo 9: Caso regime de bolhas não seja possível, assume-se regime intermitente.

5.13.1 Análise de estabilidade do escoamento estratificado

Baseado no critério de instabilidade de Kelvin-Helmholtz, Taitel e Dukler (1976) determinaram uma equação capaz de identificar a estabilidade do escoamento bifásico em dutos:

$$Fr_G \ge Fr_{G,C} \sqrt{\cos(\theta)} \Rightarrow \text{Escoamento Não-Estratificado}$$

$$Fr_G < Fr_{G,C} \sqrt{\cos(\theta)} \Rightarrow \text{Escoamento Estratificado}$$
(5.87)

onde Fr_G corresponde ao número de Froude da fase gás calculado para velocidade superficial da fase gás $(v_{G,S})$:

$$Fr_G = \left(\frac{\rho_G}{(\rho_L - \rho_G)gD}\right)^{0.5} v_{G,S}$$
 (5.88)

e o número de Froude crítico $Fr_{G,C}$ como uma função apenas da fração de área de gás calculada considerando regime estratificado estacionário utilizando o modelo de Taitel e Barnea (1990):

$$Fr_{GC} = \left(1 - \frac{h_{L,Taitel}}{D}\right) \left(\alpha_{G,Taitel}^{3} \frac{\pi D}{4K_{I,Taitel}}\right)^{0.5}$$
(5.89)

onde $K_{l,Taitel}$ e $h_{L,Taitel}$ podem ser obtidos pelas equações (5.31) e (5.33) a partir da fração de área de gás $\alpha_{G,Taitel}$ calculada através do modelo detalhado no Apêndice V – Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976).

No caso de tubulações descendentes (inclinações negativas), a velocidade da fase líquida é elevada e a altura de líquido é pequena. Sob essas condições gotas serão projetadas para a parede superior da tubulação levando a uma transição para um regime não-estratificado conforme descrito em Barnea et al. (1982a e 1982b) e Dukler e Taitel (1986). Nestes casos, a regra de transição (válida para casos onde a diferença de massa específica entre as fases é elevada) é:

$$N_L \ge N_{L,C}$$
 e $\theta < 0 \Rightarrow$ Escoamento Descendente Anular $N_L < N_{L,C}$ e $\theta < 0 \Rightarrow$ Escoamento Descendente Estratificado (5.90)

onde N_L é calculado por:

$$N_L = \left(\frac{f_{s,L}}{\cos(\theta)}\right)^{0.5} Fr_L \tag{5.91}$$

 $e\ Fr_L$ corresponde ao número de Froude da fase líquida calculado para velocidade superficial da fase líquida $(v_{S,L})$:

$$Fr_{L} = \left(\frac{\rho_{L}}{(\rho_{L} - \rho_{G})gD}\right)^{0.5} v_{S,L}$$
(5.92)

e $N_{L,C}$ é calculado por:

$$N_{L,C} = \frac{\left(1 - \frac{h_{L,Taitel}}{D}\right)^{0.5}}{\left(\frac{f_L}{f_{S,L}}\right)^{0.5}} \alpha_{L,Taitel}$$
(5.93)

Caso seja verificado que o escoamento estratificado é o padrão estável, pode-se determinar a presença de ondas na superfície da interface devido à diferença de velocidade entre as fases e devido a ondas gravitacionais.

O critério para determinação de escoamento estratificado com ondas devido a interações do tipo vento foi determinado por Taitel e Dukler (1976):

$$K \ge K_C \Rightarrow$$
 Escoamento Estratificado com Ondas $K < K_C \Rightarrow$ Escoamento Estratificado Suave (5.94)

onde:

$$K = F_G \operatorname{Re}_{S,L}^{0.5}$$

$$K_C = 2\alpha_{G,Taitel} \left(\frac{\alpha_{L,Taitel} \cos(\theta)}{0.01}\right)^{0.5}$$
(5.95)

O critério para determinação de escoamento estratificado com ondas gravitacionais foi determinado por Barnea et al. (1982a) e Dukler e Taitel (1986):

$$Fr_L \ge Fr_{L,C} \Rightarrow$$
 Escoamento Estratificado com Ondas
 $Fr_L < Fr_{L,C} \Rightarrow$ Escoamento Estratificado Suave (5.96)

onde $Fr_{L,C}$ corresponde ao número de Froude crítico da fase líquida calculado segundo:

$$Fr_{L,C} = 1.5\alpha_{L,Taitel} \left(\frac{h_{L,Taitel}}{D}\right)^{0.5}$$
(5.97)

Sendo assim, o mapa de critérios determinação do padrão de escoamento estratificado é:

$$Fr_{G} < Fr_{G,C} \sqrt{\cos(\theta)} \begin{cases} R \ge K_{C} \Rightarrow \text{Estratificado com Ondas} \\ K < K_{C} \Rightarrow \text{Estratificado Suave} \end{cases}$$

$$\theta < 0 \begin{cases} N_{L} > N_{L,C} \Rightarrow \text{Não Estratificado} \\ N_{L} < N_{L,C} \end{cases} \begin{cases} Fr_{L} \ge Fr_{L,C} \Rightarrow \text{Estratificado com Ondas} \\ Fr_{L} < Fr_{L,C} \Rightarrow \text{Estratificado Suave} \end{cases}$$

$$(5.98)$$

 $Fr_G \ge Fr_{G,C} \sqrt{\cos(\theta)} \Rightarrow \text{Não Estratificado}$

5.13.2 Análise de estabilidade do escoamento anular

Barnea et al. (1982b) determinaram que o escoamento anular não é estável para frações de área de líquido superiores a 0.35, qualquer que seja a inclinação do duto, calculadas segundo modelo apresentado por Pots (1985):

$$\alpha_{L,Pots} < 0.35 \Rightarrow$$
 Escoamento Anular $\alpha_{L,Pots} \ge 0.35 \Rightarrow$ Escoamento Bolhas ou Intermitente (5.99)

Para escoamentos onde a fração de área de líquido é inferior a 0.35 em dutos verticais pode-se analisar a estabilidade do filme através do número de Froude crítico do gás conforme:

$$Fr_G \ge Fr_{G,C} \Rightarrow \text{Escoamento Anular}$$

 $Fr_G < Fr_{G,C} \Rightarrow \text{Escoamento Bolhas ou Intermitente}$ (5.100)

onde Fr_G é determinada através de (5.88). O $Fr_{G,C}$ foi determinado por Richter (1981) e é definido como:

$$Fr_{G,C} = \frac{75}{Eo_D^2} \left[\left(1 + \frac{Eo_D^2}{75^2 f_{L,Pots}} \right)^{0.5} - 1 \right]$$

$$Eo_D^2 = D^2 \left(\frac{\Delta \rho g}{\sigma} \right)$$
(5.101)

Sendo assim, o mapa de critérios do padrão de escoamento anular é:

$$\alpha_{L,Pots} \ge 0.35 \Rightarrow \text{Não Anular}$$

$$\alpha_{L,Pots} < 0.35 \begin{cases} |\theta - 90^{\circ}| < 10^{\circ} \begin{cases} F_{G} < F_{G,C} \Rightarrow \text{Não Anular} \\ F_{G} \ge F_{G,C} \Rightarrow \text{Anular} \end{cases}$$

$$|\theta - 90^{\circ}| \ge 10^{\circ} \Rightarrow \text{Anular}$$
(5.102)

5.13.3 Análise de estabilidade entre bolhas e intermitente

Para tubulações horizontais ou pouco inclinadas ($|\theta|$ <10°), deve-se avaliar a estabilidade das bolhas através do teste das flutuações turbulentas em relação ao empuxo conforme apresentado por Taitel e Dukler (1976):

$$T \ge T_C \Rightarrow$$
 Escoamento Bolhas
 $T < T_C \Rightarrow$ Escoamento Intermitente (5.103)

onde:

$$T = \frac{2f_{S,L}}{\cos(\theta)}$$

$$T_C = \left(2\pi \frac{\alpha_{L,Zuber}^2 \alpha_{G,Zuber} D}{K_{L,Zuber}} \frac{f_{S,L}}{f_{L,Zuber}}\right)^{0.5}$$
(5.104)

onde as frações de área de gás e líquido são calculadas segundo as correlações de Zuber e Findlay (1965).

Para tubulações inclinadas ou verticais ($|\theta| \ge 10^{\circ}$) adotam-se frações de área de gás limites. Para frações de área de gás superiores a 0.52, o escoamento é intermitente. Para

frações de área de gás inferiores a 0.25, tem-se escoamento bolhas. Para a faixa intermediária de fração de área é necessário avaliar o diâmetro médio, o diâmetro de migração e o diâmetro crítico de deformação das bolhas através das expressões desenvolvidas por Dukler e Taitel (1986) e Barnea (1987):

$$d_{\max} < d_{def} \text{ e } d_{\max} < d_{migr} \Rightarrow \text{Escoamento Bolhas}$$

 $d_{\max} \ge d_{def} \text{ ou } d_{\max} \ge d_{migr} \Rightarrow \text{Escoamento Intermitente}$ (5.105)

onde o diâmetro médio, o diâmetro de migração e o diâmetro crítico de deformação das bolhas são determinados por:

$$d_{\text{max}} = \left[0.725 + 4.15 \left(\frac{v_{S,G}}{v_M}\right)^{0.5}\right] \left(\frac{\sigma}{\rho_L}\right)^{3/5} \left(2\frac{f_M v_M^3}{D}\right)^{-2/5}$$

$$d_{def} = 2 \left(\frac{0.4\sigma}{(\rho_L - \rho_G)g}\right)^{0.5}$$

$$d_{migr} = \frac{3}{8} \frac{\rho_L}{\Delta \rho} \frac{f_M v_M^2}{g \cos(\theta)}$$
(5.106)

Sendo assim, o mapa de critérios do padrão de escoamento anular é:

$$\begin{split} \left|\theta\right| < 10^{\circ} \begin{cases} T < T_{C} \Rightarrow \text{Intermitente} \\ T \geq T_{C} \Rightarrow \text{Bolhas} \end{cases} \\ \left|\theta\right| \geq 10^{\circ} \begin{cases} \alpha_{G,Zuber} < 0.25 \Rightarrow \text{Bolhas} \\ 0.25 \leq \alpha_{G,Zuber} \leq 0.52 \end{cases} \begin{cases} d_{\max} < d_{def} \\ d_{\max} < d_{def} \end{cases} \begin{cases} d_{\max} < d_{migr} \Rightarrow \text{Bolhas} \\ d_{\max} \geq d_{migr} \Rightarrow \text{Intermitente} \end{cases} \\ d_{\max} \geq d_{def} \Rightarrow \text{Intermitente} \end{cases}$$

5.13.4 Algoritmo para determinação do padrão de escoamento

O algoritmo que possibilita a determinação dos padrões de escoamento tem por objetivo calcular as funções indicadoras de padrão de escoamento (fl_P) utilizadas na Equação (5.30) para a modelagem dos termos de fechamento do modelo de escoamento, onde o padrão de escoamento P pode ser ESS, ESO, ES, AN, BO ou IN, que corresponde, respectivamente, aos padrões estratificado suave, estratificado com ondas, estratificado, anular, bolhas e intermitente.

A Figura 5.17 apresenta o algoritmo que permite a determinação do padrão de escoamento e , por conseguinte, as funções indicadores fl_P .

INÍCIO
$$fl_{ESS} = 0, fl_{ESO} = 0, fl_{ES} = 0, fl_{AN} = 0, fl_{BO} = 0, fl_{IN} = 0$$

TESTE 1) ESTABILIDADE DO PADRÃO ESTRATIFICADO

$$\begin{cases} F_{G} < F_{GC}\sqrt{\cos\left(\theta\right)} \\ \theta \geq 0 \\ K < K_{C} \Rightarrow \text{Est. Ondas, } fl_{ESO} = 1 \\ K < K_{C} \Rightarrow \text{Est. Suave, } fl_{ESS} = 1 \\ \theta < 0 \\ N_{L} < N_{LC} \\ F_{L} \geq F_{LC} \Rightarrow \text{Est. Ondas, } fl_{ESO} = 1 \\ fl_{ES} = fl_{ESS} + fl_{ESO} \end{cases}$$

$$\text{SE} \begin{cases} fl_{ES} = 1 \Rightarrow \text{FIM} \\ fl_{ES} = 0 \Rightarrow \text{CONTINUA EM TESTE 2} \end{cases}$$

TESTE 2) ESTABILIDADE DO PADRÃO ANULAR

$$\begin{split} &\left\{\alpha_{L,Pots} < 0.35 \begin{cases} \left|\theta - 90^{\text{o}}\right| < 10^{\text{o}} \left\{F_{G} \geq F_{GC} \Rightarrow \text{Anular, } fl_{AN} = 1 \\ \left|\theta - 90^{\text{o}}\right| \geq 10^{\text{o}} \Rightarrow \text{Anular, } fl_{AN} = 1 \end{cases} \\ &\text{SE} \begin{cases} fl_{AN} = 1 \Rightarrow \text{FIM} \\ fl_{AN} = 0 \Rightarrow \text{CONTINUA EM TESTE } 3 \end{cases} \end{split}$$

TESTE 3) ESTABILIDADE DO PADRÃO BOLHAS

$$\begin{cases} |\theta| < 10^{\circ} \{T \ge T_{C} \Rightarrow \text{Bolhas} \\ |\theta| \ge 10^{\circ} \begin{cases} \alpha_{G,Zuber} < 0.25 \Rightarrow \text{Bolhas} \\ 0.25 \le \alpha_{G,Zuber} \le 0.52 \{d_{\text{max}} < d_{def} \{d_{\text{max}} < d_{migr} \Rightarrow \text{Bolhas} \} \end{cases} \\ \text{SE} \begin{cases} fl_{BO} = 1 \Rightarrow \text{FIM} \\ fl_{BO} = 0 \Rightarrow fl_{IN} = 1 \end{cases}$$

FIM

Figura 5.17. Lógica de identificação de padrão de escoamento

Porém, como os métodos numéricos de solução de equações diferenciais parciais são sensíveis a descontinuidades numéricas, a utilização direta desse algoritmo gera funções indicadoras descontínuas o que implica em sérias dificuldades numéricas durante a solução do modelo. Para contornar esse problema foram utilizadas funções sigmoidais, também chamadas funções regularizadoras, que são definidas como:

$$\sigma(k, x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}$$
 (5.108)

onde k é um parâmetro que corresponde ao coeficiente angular da função sigmoidal no ponto x = 0 (adotado como sendo igual a 500 para todas as simulações realizadas ao longo desta tese).

A função sigmoidal possui as seguintes propriedades relevantes:

$$\sigma(k,0) = 0.5$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sigma(k,x)) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} (\sigma(k,x)) = 0$$

$$\lim_{k \to +\infty} (\sigma(k,x)) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0.5, \text{ se } x = 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$(5.109)$$

Aplicando as funções sigmoidais na determinação do padrão de escoamento, são obtidas as seguintes expressões:

$$\begin{split} fl_{ESO} &= \sigma(k, F_{G,C} \sqrt{\cos(\theta)} - F_G) \cdot \begin{pmatrix} \sigma(k,\theta) \cdot \sigma(k,K - K_C) + \\ + \sigma(k,-\theta) \cdot \sigma(k,N_{L,C} - N_L) \cdot \sigma(k,F_L - F_{L,C}) \end{pmatrix} \\ fl_{ESS} &= \sigma(k, F_{G,C} \sqrt{\cos(\theta)} - F_G) \cdot \begin{pmatrix} \sigma(k,\theta) \cdot \sigma(k,K_C - K) + \\ + \sigma(k,-\theta) \cdot \sigma(k,N_{L,C} - N_L) \cdot \sigma(k,F_{L,C} - F_L) \end{pmatrix} \\ fl_{ES} &= fl_{ESO} + fl_{ESS} \\ fl_{AN} &= (1 - fl_{ES}) \cdot \sigma(k,0.35 - \alpha_{L,Pots}) \cdot \begin{pmatrix} \sigma(k,|\theta - 90^{\circ}| - 10) + \\ + \sigma(k,10 - |\theta - 90^{\circ}|) \cdot \sigma(k,F_G - F_{GC}) \end{pmatrix} \\ fl_{BO} &= (1 - fl_{ES} - fl_{AN}) \begin{pmatrix} \sigma(k,10 - |\theta|) \cdot \sigma(k,T - T_C) + \\ + \sigma(k,|\theta| - 10) \cdot \begin{pmatrix} \sigma(k,0.25 - \alpha_{G,Zuber}) + \\ + \sigma(k,\alpha_{G,Zuber} - 0.25) \cdot \sigma(k,0.52 - \alpha_{G,Zuber}) \cdot \\ \cdot \sigma(k,d_{def} - d_{max}) \cdot \sigma_m(k,d_{migr} - d_{max}) \end{pmatrix} \end{split}$$

5.14 ANÁLISE DO MODELO

O modelo de escoamento bifásico a dois fluidos é dotado de quatro EDP's de coeficientes não-lineares. A análise do comportamento desses coeficientes para diferentes valores das variáveis de estado é apresentada na Subseção 5.14.1. Além disso, verifica-se que esse sistema de EDP's é hiperbólico apenas em uma região ao longo do domínio das variáveis de estado, o que pode limitar a utilização de métodos numéricos que exijam a hiperbolicidade do sistema de equações. A Subseção 5.14.2 apresenta um estudo da hiperbolicidade do modelo. Na Subseção 5.14.3 faz-se uma análise assintótica do modelo dinâmico para condições extremas de fração de área de gás, de modo a identificar se o modelo é capaz de representar adequadamente o escoamento monofásico.

5.14.1 Não-linearidade do modelo

Com o objetivo de mapear as características não-lineares do modelo dinâmico final será apresentada a seguir uma análise paramétrica da matriz de coeficientes $\underline{\underline{M}}_{\underline{B}}$ e do vetor de coeficientes $\underline{\underline{M}}_{\underline{B}}$ do modelo final descrito por (5.25) e (5.26). As Figuras 5.18, 5.19 e 5.20 correspondem a um caso de escoamento estratificado de ar e água para valores de fração de área de gás de 0.5, velocidades superficiais de gás e líquido de 1 m/s e pressão atmosférica em uma tubulação de 0.1 m:

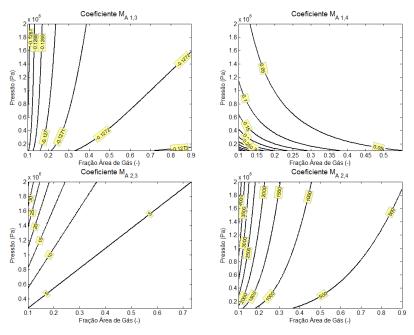


Figura 5.18. Coeficientes para as EDPs de fração de área de gás e de pressão

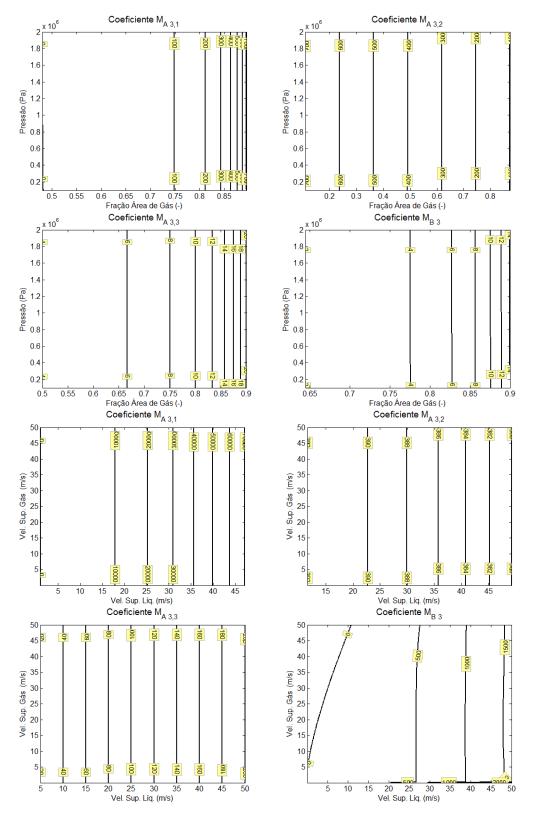


Figura 5.19. Coeficientes para a EDP de vazão mássica de líquido

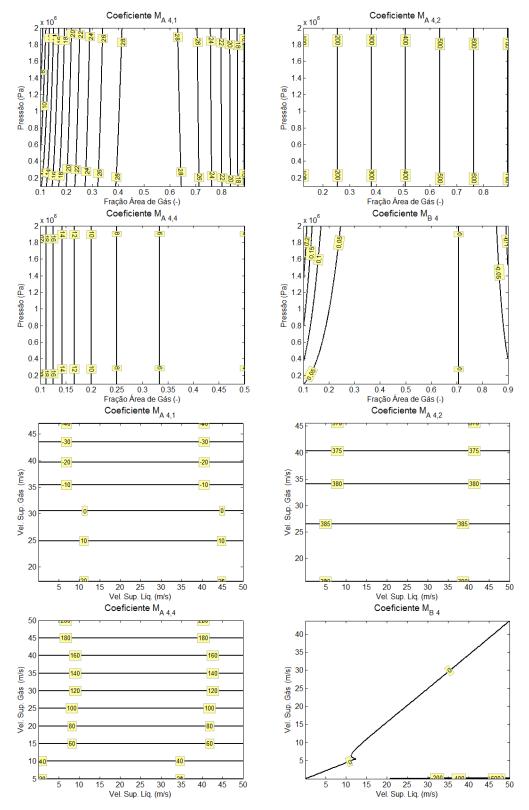


Figura 5.20. Coeficientes para a EDP de vazão mássica de gás

5.14.2 Hiperbolicidade

Um sistema de equações diferenciais parciais conforme descrito em (5.25) em sua forma primitiva é dito hiperbólico se todos os autovalores da matriz de coeficientes \underline{M}_A forem reais e distintos. Um modelo não-hiperbólico pode caracterizar uma modelagem inadequada, pois pequenas perturbações em condições de contorno podem gerar oscilações de amplitudes crescentes, caracterizando um modelo mal-posto.

Além disso, a hiperbolicidade do modelo dinâmico é um requisito necessário para a utilização de esquemas numéricos baseados na resolução de um problema de *Riemann*.

No caso de escoamento estratificado de ar e água à pressão atmosférica em uma tubulação de 0.1 m de diâmetro e velocidades superficiais de gás e líquido de 1 m/s, os autovalores são todos reais e são apresentados na Figura 5.21 em função da fração de área de gás. Pode-se observar que os autovalores são altamente dependentes dessa variável.

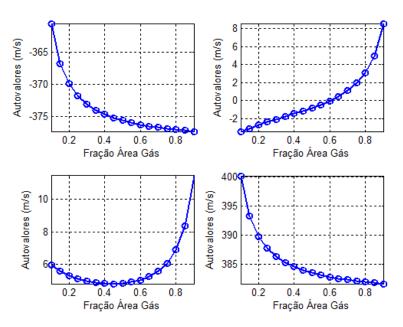


Figura 5.21. Autovalores em função da fração de área de gás

Na Figura 5.22 é feito o mapeamento de regiões de hiperbolicidade através da análise dos autovalores variando-se as velocidades superficiais das fases para diferentes valores de frações de área de gás. As regiões destacadas através da cor cinza indicam presença de autovalores complexos, o que significa que nessas regiões o sistema é não-hiperbólico. As regiões em branco indicam que todos os autovalores são reais, ou seja, que o sistema é hiperbólico.

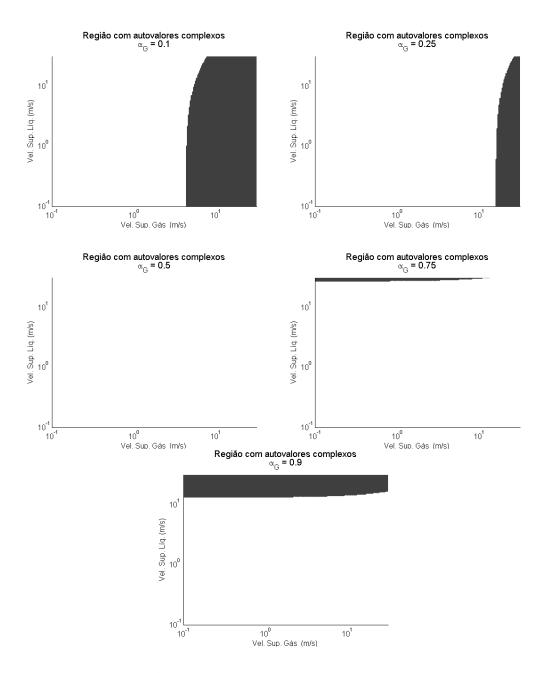


Figura 5.22. Regiões de hiperbolicidade para regime estratificado

É importante destacar que a hiperbolicidade do modelo a quatro equações está intimamente relacionada aos termos de correção de pressão, conforme abordado nos trabalhos de Drew e Passman (1999), Masella et al. (1998) e Omgba-Essama (2004).

Muitos trabalhos que utilizam métodos numéricos que exigem a hiperbolicidade do modelo, definem expressões para os termos de correção de pressão com o objetivo de estabilizar a solução numérica e, muitas vezes, tais expressões deixam de lado o significado físico e passam a atuar como meros ajustes do método.

Nessa tese objetivou-se o emprego de termos de correção de pressão com significado físico concreto e de métodos numéricos indiferentes à classificação do sistema de equações diferenciais parciais.

Da Figura 5.22 é possível verificar que o modelo bifásico com equações de fechamento para padrão estratificado possui então as seguintes características:

- a) para frações de área de gás próximas aos valores extremos, o modelo tende a ser não-hiperbólico;
- b) para fração de área igual a 0.5, verifica-se um maior domínio onde o modelo é hiperbólico;
- c) aumentando-se a velocidade das fases, o modelo tende a ser não-hiperbólico.

A análise da hiperbolicidade dos regimes anular e intermitente indica que o modelo apresenta-se não-hiperbólico ao longo de todo o domínio analisado. Cabe ressaltar que, para ambos os regimes, as pressões das fases são consideradas iguais à pressão média da seção transversal do duto. Para o regime bolhas o modelo apresenta-se hiperbólico para todo o domínio.

5.14.3 Frações de área de gás extremas

A representação de situações extremas, ou seja, situações onde ocorre desaparecimento de uma das fases, é de grande importância para a simulação de fenômenos como intermitência severa. Durante esses fenômenos a descontinuidade na fração de área de gás é significativa, com o surgimento de regiões com frações de área de gás próximas a zero ou próximas a um.

Para frações de área de gás iguais a zero tem-se o escoamento unicamente de líquido, sendo-se assim pode-se então verificar que:

$$\lim_{\substack{\alpha_G \to 0 \\ \alpha_L \to 1}} r_G = 0$$

$$\lim_{\substack{\alpha_G \to 0 \\ \alpha_L \to 1}} r_L = 1$$

$$(5.111)$$

logo:

$$\lim_{\substack{\alpha_{G} \to 0 \\ q_{G} \to 0}} \underline{\underline{M}}_{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (A\rho_{G})^{-1} \\ 0 & 0 & (AP_{R}c_{L})^{-1} & 0 \\ \left[A\rho_{L}v_{L}^{2}\right] & \left[AP_{R}\left(1-v_{L}^{2}c_{L}\right)\right] & 2v_{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(5.112)$$

Por esse limite, pode-se observar que a matriz de coeficientes \underline{M}_A possui termos que atuam sobre os gradientes de vazão mássica de gás apenas para a EDP de fração de área de gás. Isso indica que esse modelo é capaz de representar o comportamento monofásico sem perder sua representação bifásica mesmo para frações de área de gás tendendo a zero.

A mesma análise pode ser feita para frações de área de gás tendendo a 1:

$$\lim_{\substack{\alpha_G \to 1 \\ \alpha_L \to 0}} r_G = 1$$

$$\lim_{\substack{\alpha_G \to 1 \\ \alpha_L \to 0}} r_L = 0$$
(5.113)

logo:

$$\lim_{\substack{\alpha_{G} \to 1 \\ q_{L} \to 0}} \underline{\underline{M}}_{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-A\rho_{L})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (AP_{R}c_{G})^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A\rho_{G}v_{G}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AP_{R}(1-v_{G}^{2}c_{G}) \end{bmatrix} & 0 & 2v_{G} \end{bmatrix}$$
(5.114)

Novamente, pode-se observar que a matriz de coeficientes \underline{M}_A possui termos que atuam sobre os gradientes de vazão mássica de líquido apenas para a EDP de fração de área de gás. Isso indica que esse modelo é capaz de representar o comportamento monofásico sem perder sua representação bifásica mesmo para frações de área de gás tendendo a um.

Analisando o vetor de coeficientes \underline{M}_B , observa-se que os termos Γ_L e Γ_G tendem a zero quando as fases líquida e gás desaparecem, respectivamente:

$$\lim_{\alpha_{G} \to 0} \underline{M}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\Gamma_{L} + \rho_{L} g A_{L} \operatorname{sen}(\theta)) & 0 \end{bmatrix}^{T}$$

$$\lim_{\alpha_{G} \to 1} \underline{M}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\Gamma_{G} + \rho_{G} g A_{G} \operatorname{sen}(\theta)) \end{bmatrix}^{T}$$
(5.115)

Quando uma fase está próxima ao desaparecimento a sua dissipação de energia tornase praticamente nula, o que pode levar ao surgimento de velocidades elevadas. Esse comportamento faz com que o modelo dinâmico bifásico, quando aplicado em situações limites de fração de área próxima a um ou zero, torne-se extremamente rígido e de difícil solução numérica. Storkaas et al. (2001) identificaram essa dificuldade e propuseram uma alteração na forma do termo difusivo de modo a aumentar a dissipação da fase nas proximidades de seu desaparecimento.

Durante as simulações realizadas ao longo dessa tese, não foi observada a necessidade de utilizar termos dissipativos extras para valores extremos de fração de área de gás.

6 MODELAGEM DE ESCOAMENTO BIFÁSICO: ABORDAGEM VIA 3 EQUAÇÕES

6.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo tem como objetivo apresentar a modelagem do escoamento bifásico através de um modelo de mistura que consiste em um balanço de massa para a fase líquida, um balanço de massa para a fase gás e um balanço de momento para a mistura, que é modelado baseado segundo correlações empíricas que determinam a densidade da mistura, a fração de área de cada fase e a tensão de cisalhamento da mistura.

O modelo assim gerado, constituído de 3 equações, não é capaz de verificar fenômenos relevantes para o escoamento bifásico como intermitências devido ao terreno, porém possibilita a análise de comportamentos complexos como o *gas lift* intermitente com um menor esforço computacional mantendo uma precisão adequada.

Uma relação de fechamento que permite a determinação da tensão de cisalhamento da mistura, da densidade da mistura e da fração de área das fases composta unicamente por equações fenomenológicas e válida para uma grande faixa de vazões das fases é ainda um tema em aberto principalmente devido à complexidade dos fenômenos de interação e troca de momento entre as fases. Nesta tese, a correlação de Beggs e Brill (1973) é adotada por ser uma das poucas correlações da literatura aberta capaz de descrever com precisão apropriada o comportamento do escoamento bifásica para todos os padrões de escoamento e inclinações.

As principais premissas adotadas nessa modelagem são apresentadas a seguir:

- a) escoamento unidimensional: todas as variáveis de estado dependem apenas do tempo e da posição axial ao longo do tubo;
- b) escoamento bifásico gás e líquido;
- c) escoamento politrópico: fenômenos de transferência de calor entre as fases ou entre o duto e o ambiente são descritos através de uma relação de transição politrópica para ambas as fases;
- d) ausência de reações químicas e/ou fenômenos de transferência de massa entre as fases

e) fluidos compressíveis, newtonianos e com viscosidade constante e (vi) equações de fechamento determinadas através do modelo empírico de Beggs e Brill (1973).

6.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES

O desenvolvimento do balanço de massa de cada fase e do balanço de momento da mistura utilizando a mesma notação e seguindo os mesmos passos descritos no capítulo anterior implica no seguinte sistema de três equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases}
\frac{\partial (\rho_L \alpha_L)}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_L}{\partial x} \\
\frac{\partial (\rho_G \alpha_G)}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_G}{\partial x} \\
\frac{\partial (\rho_M v_M)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial (\rho_M v_M^2)}{\partial x} - \frac{\Gamma_M}{A} - \rho_M g \operatorname{sen}(\theta)
\end{cases}$$
(6.1)

onde o subscrito M corresponde à mistura e indica que a variável é obtida através de um modelo de mistura a ser descrito posteriormente.

Aplicando-se a regra da cadeia às equações de balanço:

$$\begin{cases}
\rho_{L} \frac{\partial \alpha_{L}}{\partial t} + \alpha_{L} \frac{d \rho_{L}}{d P} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_{L}}{\partial x} \\
\rho_{G} \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial t} + \alpha_{G} \frac{d \rho_{G}}{d P} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial q_{G}}{\partial x} \\
\frac{\partial \rho_{M} v_{M}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \rho_{M} v_{M}^{2}}{\partial x} - \frac{\Gamma_{M}}{A} - \rho_{M} g \operatorname{sen}(\theta)
\end{cases}$$
(6.2)

Para escrever o sistema de equações em uma forma primitiva, onde as derivadas temporais são aplicadas às variáveis de estado (pressão P, vazão mássica de líquido q_L e vazão mássica de gás q_G) estão isoladas, é necessário descrever as derivadas em relação a uma variável genérica ξ da fração de área de líquido e gás, da densidade de líquido e gás, do produto $\rho_M v_M$ e do produto $\rho_M v_M^2$ em termos desses estados através das identidades mostradas em (6.3).

$$\frac{\partial \alpha_{L}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \alpha_{G}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \alpha_{G}}{\partial \xi} = \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial q_{L}} \frac{\partial q_{L}}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha_{G}}{\partial q_{G}} \frac{\partial q_{G}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \rho_{L}}{\partial \xi} = \frac{d \rho_{L}}{dP} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \rho_{G}}{\partial \xi} = \frac{d \rho_{G}}{dP} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \rho_{M} v_{M}}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho_{M} v_{M}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_{M} v_{M}}{\partial q_{L}} \frac{\partial q_{L}}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_{M} v_{M}}{\partial q_{G}} \frac{\partial q_{G}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial \xi} = \frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial q_{L}} \frac{\partial q_{L}}{\partial \xi} + \frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial q_{G}} \frac{\partial q_{G}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial \xi} = \frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial q_{L}} \frac{\partial q_{L}}{\partial \xi} + \frac{\partial (\rho_{M} v_{M}^{2})}{\partial q_{G}} \frac{\partial q_{G}}{\partial \xi}$$
(6.3)

Os termos v_M , ρ_M , α_L e α_G são obtidos através da correlação de Beggs e Brill (1973) descrito no Apêndice VII – Modelo Beggs e Brill (1973) e os termos $\frac{\partial \alpha_G}{\partial P}$, $\frac{\partial \alpha_G}{\partial q_L}$, $\frac{\partial \alpha_G}{\partial q_G}$, $\frac{\partial \alpha_G}{\partial q_G}$, $\frac{\partial \rho_M v_M}{\partial P}$, $\frac{\partial \rho_M v_M}{\partial q_L}$, $\frac{\partial \rho_M v_M}{\partial q_C}$, $\frac{\partial \rho_M v_M}{\partial q_C}$ e $\frac{\partial \rho_M v_M}{\partial q_G}$ são obtidos através de derivadas numéricas.

Aplicando-se as identidades de (6.3) em (6.2), obtém-se o sistema na forma primitiva:

$$\begin{cases}
\left(-\rho_{L}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial P} + \alpha_{L}\frac{\partial\rho_{L}}{\partial P}\right)\frac{\partial P}{\partial t} - \rho_{L}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{L}}\frac{\partial q_{L}}{\partial t} - \rho_{L}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{G}}\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial q_{L}}{\partial x} \\
\left(\rho_{G}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial P} + \alpha_{G}\frac{\partial\rho_{G}}{\partial P}\right)\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_{G}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{L}}\frac{\partial q_{L}}{\partial t} + \rho_{G}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{G}}\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial q_{G}}{\partial x} \\
\frac{\partial(\rho_{M}v_{M})}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M})}{\partial q_{L}}\frac{\partial q_{L}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M})}{\partial q_{G}}\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial P}\right)\frac{\partial P}{\partial x} + \\
-\left(\frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial q_{L}}\right)\frac{\partial q_{L}}{\partial x} - \left(\frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial q_{G}}\right)\frac{\partial q_{G}}{\partial x} - \frac{\Gamma_{M}}{A} - \rho_{M}g \operatorname{sen}(\theta)
\end{cases} (6.4)$$

Fazendo-se o escalonamento da pressão P, utilizando a pressão de referência P_R via (5.23), obtém-se:

$$\left(-\rho_{L}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial P} + \alpha_{L}\frac{\partial\rho_{L}}{\partial P}\right)P_{R}\frac{\partial P_{T}}{\partial t} - \rho_{L}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{L}}\frac{\partial q_{L}}{\partial t} - \rho_{L}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{G}}\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial q_{L}}{\partial x}$$

$$\left(\rho_{G}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial P} + \alpha_{G}\frac{\partial\rho_{G}}{\partial P}\right)P_{R}\frac{\partial P_{T}}{\partial t} + \rho_{G}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{L}}\frac{\partial q_{L}}{\partial t} + \rho_{G}\frac{\partial\alpha_{G}}{\partial q_{G}}\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial q_{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho_{M}v_{M})}{\partial P}P_{R}\frac{\partial P_{T}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M})}{\partial q_{L}}\frac{\partial q_{L}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M})}{\partial q_{G}}\frac{\partial q_{G}}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial P}\right)P_{R}\frac{\partial P_{T}}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial q_{G}}$$

$$-\left(\frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial q_{L}}\right)\frac{\partial q_{L}}{\partial x} - \left(\frac{\partial(\rho_{M}v_{M}^{2})}{\partial q_{G}}\right)\frac{\partial q_{G}}{\partial x} - \frac{\Gamma_{M}}{A} - \rho_{M}g \operatorname{sen}(\theta)$$
(6.5)

Representado-se o sistema na forma matricial e não-conservativa:

$$\left[\frac{\partial \underline{y}}{\partial t}\right] + \underline{\underline{M}}_{A} \left[\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right] + \underline{\underline{M}}_{B} = \underline{0}$$
(6.6)

onde o vetor de variáveis de estado do modelo é definido como $\underline{y} = \begin{bmatrix} P_T & q_L & q_G \end{bmatrix}^T$, a matriz de coeficientes \underline{M}_A de dimensão $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ e o vetor de coeficientes \underline{M}_B de dimensão $\mathbf{3} \times \mathbf{1}$ têm a seguinte forma:

$$\underline{\underline{M}}_{A} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \tag{6.7}$$

$$\underline{\underline{M}}_{B} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{C} \tag{6.8}$$

sendo as matrizes \underline{A} e \underline{B} e o vetor \underline{C} iguais a:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \left(-\rho_L \frac{\partial \alpha_G}{\partial P} + \alpha_L \frac{\partial \rho_L}{\partial P} \right) P_R & \left(-\rho_L \frac{\partial \alpha_G}{\partial q_L} \right) & \left(-\rho_L \frac{\partial \alpha_G}{\partial q_G} \right) \\ \left(\rho_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial P} + \alpha_G \frac{\partial \rho_G}{\partial P} \right) P_R & \left(\rho_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial q_L} \right) & \left(\rho_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial q_G} \right) \\ \frac{\partial \left(\rho_M v_M \right)}{\partial P} P_R & \frac{\partial \left(\rho_M v_M \right)}{\partial q_L} & \frac{\partial \left(\rho_M v_M \right)}{\partial q_G} \end{bmatrix}$$
(6.9)

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \\ \left(1 + \frac{\partial \left(\rho_{M} v_{M}^{2}\right)}{\partial P}\right) P_{R} & \left(\frac{\partial \left(\rho_{M} v_{M}^{2}\right)}{\partial q_{L}}\right) & \left(\frac{\partial \left(\rho_{M} v_{M}^{2}\right)}{\partial q_{G}}\right) \end{bmatrix}$$
(6.10)

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{\Gamma_M}{A} + \rho_M g \operatorname{sen}(\theta)\right) \end{bmatrix}$$
 (6.11)

7 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DAS EDP'S

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os métodos numéricos utilizados nessa tese para a resolução no espaço das equações diferenciais parciais que modelam os trechos de tubulação com escoamento monofásico ou bifásico.

Seja o modelo matemático de escoamento em um duto descrito por um vetor de funcionais $\underline{\zeta}$ aplicados a \underline{y} , tal que \underline{y} representa um vetor de dimensão **ne** x **1**, onde cada função y_i está contida em um espaço de L que é um subespaço de H (Hilbert):

$$\underline{\zeta}(\underline{y}(t,x)) = \underline{0} \tag{7.1}$$

onde:

$$t \in \mathbb{R}^{+}$$

$$x \in \mathbb{R}/0 \le x \le L$$

$$\underline{y}(t,x) : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}^{ne}$$

$$y_{i} \in H, \forall i$$

$$(7.2)$$

Define-se o vetor de funcionais como sendo um sistema de equações diferenciais parciais conforme descrito nos Capítulos 4, 5 ou 6 com a seguinte forma:

$$\underline{\zeta}(\underline{y}(t,x)) = \left[\frac{\partial \underline{y}(t,x)}{\partial t}\right] + \underline{\underline{M}_{A}}(\underline{y}(t,x)) \left[\frac{\partial \underline{y}(t,x)}{\partial x}\right] + \underline{\underline{M}_{B}}(\underline{y}(t,x)) = \underline{0}$$
(7.3)

onde \underline{M}_A representa uma matriz de dimensão **ne** x **ne** de funções não-lineares de \underline{y} e \underline{M}_B um vetor de dimensão **ne** x **1** de funções não-lineares de \underline{y} .

Para solução desse sistema de equações diferenciais parciais são utilizados métodos de aproximação do tipo resíduos ponderados (Finlayson, 1980) adaptados para múltiplas variáveis. Esses métodos permitem a representação das equações diferenciais parciais do modelo a um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo.

7.2 MÉTODOS DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Seja o vetor de funções aproximadas $\underline{\tilde{y}}(t,x)$ de dimensão **ne** x **1** que corresponde a uma aproximação para $\underline{y}(t,x)$ em um subespaço S de H, aproximando-se o vetor de funções \underline{y} por $\underline{\tilde{y}}$ através dos elementos da base $\{\phi_j\}$, tem-se:

$$\underline{\tilde{y}}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \underline{\tilde{y}}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{j}(t) \phi_{j}(x)$$

$$(7.4)$$

onde $\phi_j(x)$ constitui o j-ésimo elemento da base ortonormal de S e $\underline{c}_j(t)$ é o j-ésimo vetor de funções temporais de coeficientes de Fourier de y(t,x).

Pode-se então definir o vetor de resíduos como sendo a aplicação do vetor de funcionais sobre o vetor de funções aproximadas:

$$\underline{\mathfrak{R}} = \zeta\left(\tilde{y}\right) \neq \underline{0} \tag{7.5}$$

O fundamento do método de resíduos ponderados é impor a ortogonalidade dos resíduos em relação a todos os elementos de uma base do espaço L.

Definindo-se a ortogonalidade de funções a partir do produto interno nulo tal que sejam f e g funções reais de uma variável e duplamente integráveis em [a,b], o produto interno entre as funções f e g em um intervalo [a,b] é dado por:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{a}^{b} f(x) g(x) dx$$
 (7.6)

Desse modo, a ortogonalidade entre o vetor de resíduos e as funções de ponderação $\psi_i(x)$ é dada por:

$$\left\langle \underline{\zeta}\left(\underline{y}(t,x)\right), \psi_{i}(x) \right\rangle = \int_{a}^{b} \underline{\mathfrak{R}} \psi_{i}(x) dx = \int_{a}^{b} \underline{\zeta}\left(\underline{\tilde{y}}(t,x)\right) \psi_{i}(x) dx = 0$$

$$(7.7)$$

A partir de (7.7), obtém-se um sistema não-linear de n equações utilizadas para a determinação dos n coeficientes de Fourier $\underline{c}_j(t)$.

Variações do método de resíduos ponderados consistem de diferentes escolhas para o conjunto de funções de ponderação $\{\psi_i\}$:

- a) Método dos momentos: $\{\psi_i\}$ corresponde ao conjunto dos monômios $\{1 \ x \ x^2 \ x^3 \ \cdots\};$
- b) Método da colocação: $\{\psi_i\}$ corresponde a deltas de Dirac para as abscissas onde se deseja zerar o resíduo;
- c) Método dos mínimos quadrados: $\{\psi_i\}$ corresponde ao funcional dos elementos da base $\{\zeta(\phi_i)\}$;
- d) Método de *Galerkin*: $\{\psi_i\}$ corresponde à base $\{\phi_i\}$.

Os Métodos de Elementos Finitos correspondem a um grupo específico de métodos de resíduos ponderados onde as funções base $\{\phi_i\}$ possuem valores não nulos apenas nos intervalos contíguos ao ponto (nó) i (base de suporte local).

Diversas variações do método de *Galerkin* são encontradas na literatura:

- a) Método de *Petrov-Galerkin*: conjunto de funções peso $\{\psi_i\}$ calculadas a partir da seguinte equação: $\alpha\{\psi_i^*\}+\{\psi_i\}=\{\phi_i\}$, onde α é uma constante, $\{\psi_i^*\}$ é tal que $\int_{\Omega_i} \psi_i^* \ d\Omega = \pm \frac{h_i}{2}, \ \Omega \text{ é o domínio e } h_i \text{ é o comprimento do } i\text{-ésimo elemento};$
- SUPG (Stream Upwind Petrov-Galerkin) corresponde à uma adaptação do método de Petrov-Galerkin para problemas multidimensionais através da determinação da direção upwind coincidente com as linhas de corrente do escoamento (Brooks e Hughes, 1982);
- c) SUPG / DC (Stream Upwind Petrov-Galerkin with Discontinuity-Capturing) propõe uma melhoria no método SUPG, incorporando um termo para captura de descontinuidade (Hughes et al., 1986a e 1986b);

- d) GLS (*Galerkin Least-Square*) propõe uma melhoria no método SUPG, introduzindo no termo de estabilização uma componente dispersiva (Hughes et al., 1989a e 1989b);
- e) CAU (Consistent Approximation Upwind) propõe uma forma consistente de determinação da direção de upwind (Galeão e Dutra do Carmo, 1988). Este método adiciona, de forma consistente, uma perturbação não linear que introduz um controle da derivada na direção de aproximação dos gradientes, evitando oscilações. Almeida e Galeão (1996) apresentam a generalização do método CAU e sua utilização combinada com os métodos de refinamento de malha, obtendo melhores resultados em regiões de gradientes elevados;
- f) GGLS (Galerkin Gradient Least-Square) propõe a adição, ao método de Galerkin, de um termo dependente da malha, obtido através dos mínimos quadrados dos gradientes da equação que descrevem o problema (Franca e Dutra do Carmo, 1989).

Outra família de métodos busca uma discretização espaço-temporal:

- g) STGLS (*Space-Time Galerkin Least-Square*) propõe a estabilização da solução de transporte, introduzindo uma função que representa tanto a discretização espacial quanto a temporal. Neste método há uma expansão do número de variáveis do problema, já que é necessário calcular, simultaneamente, os coeficientes de Fourier e a variação destes no tempo (Shakib e Hughes, 1991);
- h) Método *Taylor-Galerkin* utiliza uma expansão em série de Taylor das derivadas temporais dos funcionais precedendo a discretização espacial segundo *Galerkin* (Donea, 1984);
- i) Método Preditores-Corretores (*Two-Step Taylor-Galerkin*) utiliza uma expansão das derivadas temporais equivalente a um método de Runge-Kutta de segunda ordem antes da discretização espacial.

7.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método é aplicado ao duto k de comprimento L_k segundo o método de elementos finitos, através da discretização em N_k elementos de tamanho variável $h_k^{(j)}$ delimitados pelo

conjunto de nós $j = 0, 1, ..., N_k$, sendo o elemento j delimitado pelos nós j-1 e j. Define-se, então, um vetor de estados nodais y_j empilhados de dimensão $\mathbf{ne_k} \cdot \mathbf{N_k} \times \mathbf{1}$ como sendo:

$$\underline{Y}_{k}(t) = \begin{bmatrix} \underline{y}_{0}^{T} & \underline{y}_{1}^{T} & \cdots & \underline{y}_{N_{k}}^{T} \end{bmatrix}^{T}$$

$$(7.8)$$

onde cada vetor de estado nodal \underline{y}_j possui ne_k variáveis, que correspondem ao número de variáveis de estado do modelo do duto k (2 se modelo monofásico, 3 se modelo bifásico a 3 equações e 4 se modelo bifásico a 4 equações).

O aproximador para o vetor de estados ao longo do duto é definido como um truncamento em séries de Fourier é dado por:

$$\underline{\tilde{y}}(x,t) = \sum_{j} \underline{\tilde{y}}^{(j)}(x,t) = \sum_{j} \underline{y}_{j}(t)\phi_{j}(\theta(x))$$
(7.9)

onde $\underline{y}_j(t)$ representa os coeficientes de Fourier que nesse caso coincidem com o vetor de estados para o nó j da malha de discretização e $\underline{\tilde{y}}^{(j)}(x,t)$ representa a função que aproxima o comportamento dos estados ao longo do elemento j.

A função base $\phi_j(x)$ corresponde a uma função pulso triangular em torno do nó j como na Figura 7.1 e é descrita matematicamente por:

$$\phi_{j}(\theta(x)) = \begin{cases} 0, & \theta_{j}(x) < -1, \\ 1 + \theta_{j}(x), & -1 \le \theta_{j}(x) < 0, \\ 1 - \theta_{j}(x), & 0 \le \theta_{j}(x) < 1, \\ 0, & \theta_{j}(x) \ge 1. \end{cases}$$
(7.10)

onde a coordenada θ_i é dada por:

$$\theta_{j}(x) = \begin{cases} (x - \sum_{i=1}^{j} h_{i}) / h_{j}, x \ge \sum_{i=1}^{j} h_{i} \\ (x - \sum_{i=1}^{j-1} h_{i}) / h_{j-1}, x < \sum_{i=1}^{j} h_{i} \end{cases}$$
(7.11)

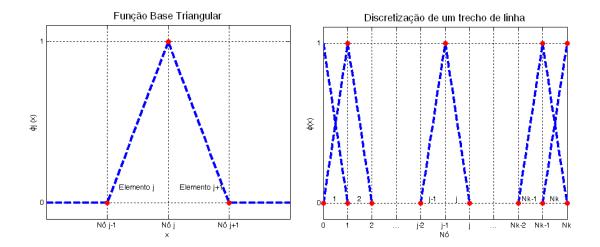


Figura 7.1. Função base triangular

Com o objetivo de ilustrar o emprego de funções de base locais pulso triangulares, a Figura 7.2 descreve a aproximação da função $y(x) = 2 x^2 - 2 x + 1$ por uma série de funções de base triangular de 3 e 5 elementos.

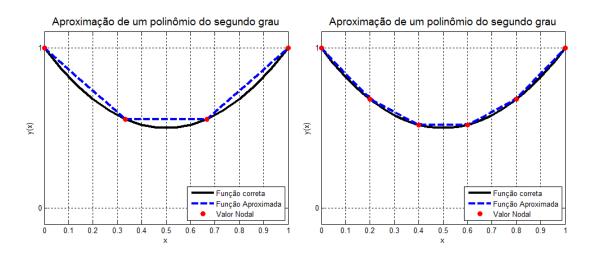


Figura 7.2. Aproximação para 3 e 5 elementos finitos

Pela definição da função base, (7.10) e (7.11), pode-se observar que $\underline{\tilde{y}}^{(j)}(t,x)$ possui um comportamento restrito ao elemento sob influência dos estados dos nós que limitam o elemento (nós j-1 e j):

$$\underline{\tilde{y}}^{(j)}(t,x) = \underline{y}_{j-1}(t)\phi_{j-1}(\theta_{j-1}(x)) + \underline{y}_{j}(t)\phi_{j}(\theta_{j}(x))$$
(7.12)

Esse mesmo comportamento pode ser observado nas derivadas temporal e espacial:

$$\frac{\partial \tilde{\underline{y}}^{(j)}(t,x)}{\partial t} = \underline{\dot{y}}_{j-1}(t)\phi_{j-1}(x) + \underline{\dot{y}}_{j}(t)\phi_{j}(x)
\frac{\partial \tilde{\underline{y}}^{(j)}(t,x)}{\partial x} = \underline{\underline{y}}_{j-1}(t)\dot{\phi}_{j-1}(x) + \underline{\underline{y}}_{j}(t)\dot{\phi}_{j}(x)$$
(7.13)

Substituindo-se a função aproximada (7.9) no vetor de funcionais (7.3), gera-se o vetor de resíduos em cada elemento *j*:

$$\underline{\mathfrak{R}}^{(j)} = \frac{\partial \underline{\tilde{y}}^{(j)}(t,x)}{\partial t} + \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(j)}(t,x)\right) \frac{\partial \underline{\tilde{y}}^{(j)}(t,x)}{\partial x} + \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(j)}(t,x)\right)$$
(7.14)

Tem-se então:

$$\underline{\mathfrak{R}}^{(j)} = \begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\underline{\underline{y}}_{j-1}(t) \phi_{j-1} \left(\theta_{j-1}(x) \right) + \underline{\underline{y}}_{j}(t) \phi_{j} \left(\theta_{j}(x) \right) \right) + \dots \\
\underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\underline{y}}_{j-1}(t) \phi_{j-1} \left(\theta_{j-1}(x) \right) + \underline{\underline{y}}_{j}(t) \phi_{j} \left(\theta_{j}(x) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\underline{\underline{y}}_{j-1}(t) \phi_{j-1} \left(\theta_{j-1}(x) \right) + \underline{\underline{y}}_{j}(t) \phi_{j} \left(\theta_{j}(x) \right) \right) \\
\underline{\underline{\underline{M}}}_{B} \left(\underline{\underline{y}}_{j-1}(t) \phi_{j-1} \left(\theta_{j-1}(x) \right) + \underline{\underline{y}}_{j}(t) \phi_{j} \left(\theta_{j}(x) \right) \right)
\end{cases} \tag{7.15}$$

Aplicando as propriedades das funções base $\phi_j(\theta)$ e simplificando a notação chega-se a:

$$\underline{\mathfrak{R}}^{(j)} = \underline{\dot{y}}_{j-1} \phi_{j-1} + \underline{\dot{y}}_{j} \phi_{j} + \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(j)} \right) \underline{y}_{j-1} \dot{\phi}_{j-1} + \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(j)} \right) \underline{y}_{j} \dot{\phi}_{j} + \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(j)} \right)$$
(7.16)

Impondo-se a ortogonalidade entre o vetor de resíduos e as funções peso ψ_i :

$$\sum_{i=1}^{N_k} \left(\int_{\{i\}} \mathfrak{R}^{(i)} \psi_j dx \right) = \underline{0}, \ 0 \le j \le N_k$$
 (7.17)

Substituindo-se a expressão do resíduo (7.16), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{N_{k}} \left(\int_{\{i\}} \left(\underline{\dot{y}}_{i-1} \phi_{i-1} + \underline{\dot{y}}_{i} \phi_{i} \right) \psi_{j} dx \right) + \\
+ \sum_{i=1}^{N_{k}} \left(\int_{\{i\}} \left(\underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \underline{y}_{i-1} \dot{\phi}_{i-1} + \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \underline{y}_{i} \dot{\phi}_{i} \right) \psi_{j} dx \right) + \\
+ \sum_{i=1}^{N_{k}} \left(\int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_{j} dx \right) = \underline{0}, \quad 0 \leq j \leq N_{k}$$
(7.18)

que corresponde a:

$$\sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{\dot{y}}_{i-1} \int_{\{i\}} \phi_{i-1} \psi_{j} dx \right) + \sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{\dot{y}}_{i} \int_{\{i\}} \phi_{i} \psi_{j} dx \right) + \\
+ \sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{y}_{i-1} \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \dot{\phi}_{i-1} \psi_{j} dx \right) + \sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{y}_{i} \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \dot{\phi}_{i} \psi_{j} dx \right) + \\
+ \sum_{i=1}^{Nk} \left(\int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_{j} dx \right) = \underline{0}, \quad 0 \leq j \leq N_{k}$$
(7.19)

Trocando a variável de integração de x para θ em (7.20):

$$\sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{\dot{y}}_{i-1} h_i \int_{\{i\}} \phi_{i-1} \psi_j d\theta \right) + \sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{\dot{y}}_i h_i \int_{\{i\}} \phi_i \psi_j d\theta \right) + \\
- \sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{y}_{i-1} \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_A \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_j d\theta \right) + \sum_{i=1}^{Nk} \left(\underline{y}_i \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_A \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_j d\theta \right) + \\
+ \sum_{i=1}^{Nk} \left(h_i \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_j d\theta \right) = \underline{0}, \quad 0 \le j \le N_k$$
(7.20)

Admitindo o formato matricial:

$$\underline{\Theta}_{k} \, \underline{\dot{Y}}_{k} + \underline{\Lambda}_{k} \, \underline{Y}_{k} + \underline{\Xi}_{k} = \underline{0} \tag{7.21}$$

onde $\underline{\Theta}_k$ é a matriz de massa do sistema de equações diferenciais ordinárias com dimensão $\mathbf{ne_{k^*}}(\mathbf{N_k+1})$ x $\mathbf{ne_{k^*}}(\mathbf{N_k+1})$, $\underline{\Lambda}_k$ é uma matriz de coeficientes com a mesma dimensão de $\underline{\Theta}_k$, e $\underline{\Xi}_k$ é um vetor de coeficientes com dimensão $\mathbf{ne_{k^*}}(\mathbf{N_k+1})$ x 1 e o vetor \underline{Y}_k , conforme definido em

(7.8), é composto pelos vetores de variáveis de estado nodais empilhados com dimensão $\mathbf{ne_{k^*}}(\mathbf{N_k+1}) \times \mathbf{1}$.

A matriz $\underline{\Theta}_k$ é definida como a soma $\underline{\Theta}_{k,1} + \underline{\Theta}_{k,2}$, onde:

$$\underline{\underline{\Theta}}_{k,1} = \begin{bmatrix}
h_1 \int_{\{1\}} \phi_0 \psi_0 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_1 \psi_0 d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk-1} \psi_0 d\theta \underline{I} & \underline{\underline{\Theta}} \\
h_1 \int_{\{1\}} \phi_0 \psi_1 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_1 \psi_1 d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk-1} \psi_1 d\theta \underline{I} & \underline{\underline{\Theta}} \\
h_1 \int_{\{1\}} \phi_0 \psi_2 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_1 \psi_2 d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk-1} \psi_2 d\theta \underline{I} & \underline{\underline{\Theta}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
h_1 \int_{\{1\}} \phi_0 \psi_{Nk} d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_1 \psi_{Nk} d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk-1} \psi_{Nk} d\theta \underline{I} & \underline{\underline{\Theta}}
\end{bmatrix}$$
(7.22)

$$\underline{\Theta}_{k,2} = \begin{bmatrix}
\underline{0} & h_1 \int_{\{1\}} \phi_1 \psi_0 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_2 \psi_0 d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk} \psi_0 d\theta \underline{I} \\
\underline{0} & h_1 \int_{\{1\}} \phi_1 \psi_1 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_2 \psi_1 d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk} \psi_1 d\theta \underline{I} \\
\underline{0} & h_1 \int_{\{1\}} \phi_1 \psi_2 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_2 \psi_2 d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk} \psi_2 d\theta \underline{I} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\underline{0} & h_1 \int_{\{1\}} \phi_1 \psi_{Nk} d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_2 \psi_{Nk} d\theta \underline{I} & \cdots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk} \psi_{Nk} d\theta \underline{I} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

onde $\underline{0}$ e \underline{I} são matrizes de zeros e identidade, respectivamente, com dimensão $\mathbf{ne_k}$ x $\mathbf{ne_k}$.

A matriz $\underline{\Lambda}_k$ é definida como $\underline{\Lambda}_{k,1} + \underline{\Lambda}_{k,2}$, onde:

$$\underline{\underline{\underline{A}}}_{k,1} = \begin{bmatrix}
-\int_{\{1\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{0} d\theta & -\int_{\{2\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{0} d\theta & \cdots & -\int_{\{Nk\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{0} d\theta & \underline{\underline{0}} \\
-\int_{\{1\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{1} d\theta & -\int_{\{2\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{1} d\theta & \cdots & -\int_{\{Nk\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{1} d\theta & \underline{\underline{0}} \\
-\int_{\{1\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{2} d\theta & -\int_{\{2\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{2} d\theta & \cdots & -\int_{\{Nk\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{2} d\theta & \underline{\underline{0}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-\int_{\{1\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{Nk} d\theta & -\int_{\{2\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{Nk} d\theta & \cdots & -\int_{\{Nk\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{Nk} d\theta & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

$$\underline{\underline{\Delta}}_{k,2} = \begin{bmatrix}
\underline{\underline{Q}} & \int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{0} d\theta & \int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{0} d\theta & \cdots & \int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{0} d\theta \\
\underline{\underline{Q}} & \int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{1} d\theta & \int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{1} d\theta & \cdots & \int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{1} d\theta \\
\underline{\underline{Q}} & \int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{2} d\theta & \int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{2} d\theta & \cdots & \int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{2} d\theta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\underline{\underline{Q}} & \int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \psi_{Nk} d\theta & \int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \psi_{Nk} d\theta & \cdots & \int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \psi_{Nk} d\theta
\end{bmatrix} \tag{7.25}$$

O vetor Ξ é definido como:

$$\Xi = \begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{Nk} \left(h_{i} \int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_{0} d\theta \right) \\
\sum_{i=1}^{Nk} \left(h_{i} \int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_{1} d\theta \right) \\
\sum_{i=1}^{Nk} \left(h_{i} \int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_{2} d\theta \right) \\
\sum_{i=1}^{Nk} \left(h_{i} \int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \psi_{N_{k}} d\theta \right)
\end{bmatrix}$$
(7.26)

A resolução da equação (7.21) fornece equações diferenciais no tempo do vetor de estados nodais \underline{Y}_k para o duto k com condições de contorno a serem definidas segundo (i) von Neumann, ou seja, gradiente nulo para a variável especificada que corresponde a especificar

um estado nodal igual ao valor nodal de um nó vizinho e/ou (ii) *Dirichlet*, ou seja, valor da variável de estado é especificado:

$$Y_{k,i}\left(t\right) = C_{k,i}\left(t\right) \tag{7.27}$$

onde \underline{C}_k corresponde ao vetor de condições de contorno com dimensão ($\mathbf{Ndir}_k + \mathbf{Nneu}_k$) x 1, onde $Ndir_k$ é o número de condições de contorno do tipo Dirichlet do trecho de tubulação k, $Nneu_k$ é o número de condições de contorno do tipo $von\ Neumann$ do trecho de tubulação k.

Além das condições iniciais definidas segundo o vetor de estados nodais iniciais Z_k:

$$\underline{Y}_{k}(0) = \underline{Z}_{k} \tag{7.28}$$

A utilização de condições de contorno leva à redução do número de variáveis de estado do duto. Define-se então o vetor de estados reduzidos $\underline{W}_k(t)$ com tamanho $(ne_k \cdot (N_k + 1) - (Ndir_k + Nneu_k)) \times 1$, onde ne_k é o número de estados do modelo utilizado para representar o trecho de tubulação k.

O sistema de equações diferenciais ordinárias e suas condições iniciais em termos do vetor de estado reduzido adquirem a seguinte forma:

$$\underline{\underline{Y}}_{k}(t) = \underline{\underline{S}}_{\underline{W}_{k}} \underline{\underline{W}}_{k}(t) + \underline{\underline{C}}_{k}(t)$$

$$\underline{\underline{W}}_{k}(t) = \left[\underline{\underline{S}}_{\underline{W}_{k}}\right]^{T} \underline{\underline{\Theta}}_{k}^{-1} \left[-\underline{\underline{\Lambda}}_{k} \underline{\underline{Y}}(t) - \underline{\underline{\Xi}}_{k}\right]$$

$$\underline{\underline{W}}(0) = \left[\underline{\underline{S}}_{\underline{W}_{k}}\right]^{T} \underline{\underline{Z}}_{k}$$
(7.29)

onde $\underline{\underline{S}_W}_k$ corresponde à matriz de seleção de estados reduzidos do duto k e tem dimensão $\mathbf{ne_{k^*}(N_k+1)}$ \mathbf{x} ($\mathbf{ne_{k^*}(N_k+1)-(Ndir_k+Nneu_k)}$) que possui a seguinte regra de formação: o elemento da i-ésima linha com a j-ésima coluna é igual a 1 se o i-ésimo estado nodal corresponde ao j-ésimo estado reduzido, do contrário é igual a zero.

7.4 MÉTODO DE *GALERKIN* EM ELEMENTOS FINITOS

Baseado no formalismo de *Galerkin*, utilizando-se funções peso $\{\psi_j\}$ iguais às funções base $\{\phi_j\}$, após aplicação das propriedades das funções base, as matrizes $\underline{\Theta}_{1,k}$, $\underline{\Theta}_{2,k}$, passam a ser representadas por:

$$\underline{\underline{\Theta}}_{1,k} = \begin{bmatrix}
h_1 \int_{\{1\}} \phi_0 \phi_0 d\theta \underline{I} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
h_1 \int_{\{1\}} \phi_0 \phi_1 d\theta \underline{I} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_1 \phi_1 d\theta \underline{I} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{0}} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_1 \phi_2 d\theta \underline{I} & \ddots & \vdots & \underline{\underline{0}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk-1} \phi_{Nk-1} d\theta \underline{I} & \vdots \\
\underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk-1} \phi_{Nk} d\theta \underline{I} & \underline{\underline{0}}
\end{bmatrix}$$
(7.30)

$$\underline{\underline{\Theta}}_{2,k} = \begin{bmatrix}
\underline{\underline{0}} & h_1 \int_{\{1\}} \phi_1 \phi_0 d\theta \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{0}} & h_1 \int_{\{1\}} \phi_1 \phi_1 d\theta \underline{\underline{I}} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_2 \phi_1 d\theta \underline{\underline{I}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & h_2 \int_{\{2\}} \phi_2 \phi_2 d\theta \underline{\underline{I}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk} \phi_{Nk-1} d\theta \underline{\underline{I}} \\
\underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \phi_{Nk} \phi_{Nk} d\theta \underline{\underline{I}}
\end{bmatrix}$$
(7.31)

As matrizes $\underline{\Lambda}_{1,k}, \underline{\Lambda}_{2,k}$ assumem a seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{1,k} = \begin{bmatrix} -\int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \phi_{0} d\theta & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ -\int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \phi_{1} d\theta & -\int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \phi_{1} d\theta & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \phi_{2} d\theta & \ddots & \vdots & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \phi_{Nk-1} d\theta & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & -\int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \phi_{Nk} d\theta & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

$$(7.32)$$

$$\underline{\Lambda}_{2,k} = \begin{bmatrix}
\underline{0} & \int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)}\right) \phi_{0} d\theta & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & \int_{\{1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)}\right) \phi_{1} d\theta & \int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)}\right) \phi_{1} d\theta & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & \underline{0} & \int_{\{2\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)}\right) \phi_{2} d\theta & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)}\right) \phi_{Nk-1} d\theta \\
\underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \int_{\{Nk\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)}\right) \phi_{Nk} d\theta
\end{bmatrix}$$
(7.33)

E os vetores $\underline{\Xi}_{1,k}$ e $\underline{\Xi}_{2,k}$ assumem a seguinte forma:

$$\underline{\Xi}_{1,k} = \begin{bmatrix} h_i \int_{\{1\}} \underline{M}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \phi_0 d\theta \\ h_2 \int_{\{2\}} \underline{M}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \phi_1 d\theta \\ \vdots \\ h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \underline{M}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \phi_{Nk-1} d\theta \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$(7.34)$$

$$\underline{\Xi}_{2,k} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ h_1 \int_{\{1\}} \underline{M}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(1)} \right) \phi_1 d\theta \\ h_1 \int_{\{2\}} \underline{M}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(2)} \right) \phi_2 d\theta \\ \vdots \\ h_{Nk} \int_{\{Nk\}} \underline{M}_B \left(\underline{\tilde{y}}^{(Nk)} \right) \phi_{N_k} d\theta \end{bmatrix}$$

$$(7.35)$$

onde $\underline{0}$ e \underline{I} são matrizes de zeros e identidade, respectivamente, com dimensão $\mathbf{ne_k}$ x $\mathbf{ne_k}$.

Aplicando-se as propriedades descritas no Apêndice III – Integração das Matrizes do Método de *Galerkin*, as matrizes $\underline{\Theta}_{1,k}$, $\underline{\Theta}_{2,k}$, passam a ser representadas por:

$$\underline{\Theta}_{1,k} = \begin{bmatrix}
\frac{h_1}{3}\underline{I} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\
\frac{h_1}{6}\underline{I} & \frac{h_2}{3}\underline{I} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{0} & \frac{h_2}{6}\underline{I} & \ddots & \vdots & \underline{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \frac{h_{Nk}}{3}\underline{I} & \vdots \\
\underline{0} & \underline{0} & \frac{h_{Nk}}{6}\underline{I} & \underline{0}
\end{bmatrix}$$
(7.36)

$$\underline{\Theta}_{2,k} = \begin{bmatrix}
\underline{0} & \frac{h_1}{6}\underline{I} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & \frac{h_1}{3}\underline{I} & \frac{h_2}{6}\underline{I} & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & \underline{0} & \frac{h_2}{3}\underline{I} & \ddots & \underline{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{h_{Nk}}{6}\underline{I} \\
\underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \frac{h_{Nk}}{3}\underline{I}
\end{bmatrix}$$
(7.37)

As matrizes $\underline{\Lambda}_{1,k}$, $\underline{\Lambda}_{2,k}$ assumem a seguinte forma:

$$\underline{\Lambda}_{1,k} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}_{A,0,1} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{\underline{M}}_{A,1,1} & -\underline{\underline{M}}_{A,1,2} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{M}}_{A,2,2} & \ddots & \vdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\underline{\underline{M}}_{A,Nk-1,Nk} & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{\underline{M}}_{A,Nk,Nk} & \underline{0} \end{bmatrix}$$
 (7.38)

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{2,k} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{A,0,1} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{A,1,1} & \underline{\underline{M}}_{A,1,2} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{A,2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \underline{\underline{M}}_{A,Nk-1,Nk} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{M}}_{A,Nk,Nk} \end{bmatrix}$$

$$(7.39)$$

E os vetores $\underline{\Xi}_{1,k}$ e $\underline{\Xi}_{2,k}$ assumem a seguinte forma:

$$\underline{\Xi}_{1,k} = \begin{bmatrix} h_1 \underline{M}_{B,0,1} \\ h_2 \underline{M}_{B,1,2} \\ \vdots \\ h_{Nk-1} \underline{M}_{B,Nk-1,Nk} \\ 0 \end{bmatrix}$$
(7.40)

$$\underline{\Xi}_{2,k} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ h_1 \underline{M}_{B,1,1} \\ h_2 \underline{M}_{B,2,2} \\ \vdots \\ h_{Nk} \underline{M}_{B,Nk,Nk} \end{bmatrix}$$
(7.41)

As matrizes $\underline{\underline{M}}_{A,j,j}$ e $\underline{\underline{M}}_{A,j,j+1}$ e os vetores $\underline{\underline{M}}_{B,j,j}$ e $\underline{\underline{M}}_{B,j,j+1}$ são integrados numericamente através do método de quadratura Gauss-Lagrange, sendo então definidos como:

$$\underline{\underline{M}}_{A,i,i+1} = \int_{\{i+1\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i+1)} \right) \phi_{i} d\theta$$

$$\underline{\underline{M}}_{A,i,i} = \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{i} d\theta$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,i,i+1} = \int_{\{i+1\}} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i+1)} \right) \phi_{i} d\theta$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,i,i} = \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{i} d\theta$$
(7.42)

A integração numérica dos termos anteriores é descrita em detalhes no Apêndice III – Integração das Matrizes do Método de *Galerkin*.

7.5 MÉTODO DE *PETROV-GALERKIN* EM ELEMENTOS FINITOS

O método Petrov-Galerkin utiliza um conjunto de funções peso $\{\psi_j\}$ calculado a partir da seguinte equação algébrica: $\psi_j = \phi_j + \alpha \psi_j^*$, onde α é uma constante positiva e diferente de zero e ψ_j^* é definido tal que $\int_{\Omega} \psi_j^* d\Omega = \pm \frac{h_j}{2}$.

A forma mais simples de ψ_j^* é:

$$\psi_{j}^{*}(\theta(x)) = \begin{cases} -\frac{h_{j}}{2} \frac{d\phi_{i}}{dx} sign(v_{M,j}), & 0 \leq \theta_{j}(x) < 1\\ +\frac{h_{j-1}}{2} \frac{d\phi_{i}}{dx} sign(v_{M,j}), & -1 \leq \theta_{j-1}(x) < 0\\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
(7.43)

onde v_M é a velocidade da mistura, que para uma função base triangular corresponde a:

$$\psi_{j}\left(\theta(x)\right) = \begin{cases}
1 - \theta_{j} - \alpha \frac{sign(v_{M,j})}{2}, & 0 \le \theta_{j}(x) < 1 \\
1 + \theta_{j-1} + \alpha \frac{sign(v_{M,j})}{2}, & -1 \le \theta_{j-1}(x) < 0 \\
0, & \text{caso contrário}
\end{cases} (7.44)$$

A Figura 7.3 descreve a função base $\phi_j(x)$ e a função peso $\psi_j(x)$ para α igual a 0,25 e velocidade positiva (da esquerda para a direita).

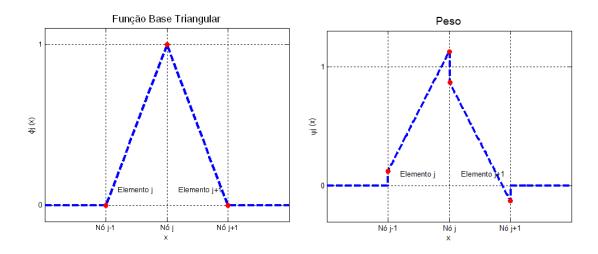


Figura 7.3. Funções base e peso para o método de Petrov-Galerkin

Utilizando-se o conjunto de funções peso $\{\psi_j\}$, conforme (7.40), após aplicação das propriedades das funções base, as matrizes $\underline{\Theta}_k$, $\underline{\Lambda}_k$ e $\underline{\Xi}_k$ assumem a seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Theta}}_{k} = \underline{\underline{\Theta}}_{1,k} + \underline{\underline{\Theta}}_{2,k} + \underline{\underline{\Theta}}_{3,k} \tag{7.45}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{k} = \underline{\underline{\Lambda}}_{k,1} + \underline{\underline{\Lambda}}_{k,2} + \underline{\underline{\Lambda}}_{k,3} \tag{7.46}$$

$$\underline{\Xi}_k = \underline{\Xi}_{k,1} + \underline{\Xi}_{k,2} + \underline{\Xi}_{k,3} \tag{7.47}$$

sendo $\underline{\Theta}_{1,k}$, $\underline{\Theta}_{2,k}$, $\underline{\Lambda}_{1,k}$, $\underline{\Lambda}_{2,k}$, $\underline{\Xi}_{1,k}$ e $\underline{\Xi}_{2,k}$ idênticas às obtidas para o método de *Galerkin* e $\underline{\Theta}_{3,k}$, $\underline{\Lambda}_{3,k}$, e $\underline{\Xi}_{3,k}$ definidas como:

$$\underline{\underline{\Theta}}_{k,3} = \frac{\alpha_{k}}{4} \operatorname{diag}\left(\operatorname{sign}\left(\underline{\underline{v}}_{\underline{M}_{k}}\right)\right) \begin{pmatrix}
-h_{1} \underline{I} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\
+h_{1} \underline{I} & -h_{2} \underline{I} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{0} & +h_{2} \underline{I} & \ddots & \vdots & \underline{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & -h_{Nk} \underline{I} & \vdots \\
\underline{0} & \underline{0} & +h_{Nk} \underline{I} & \underline{0}
\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}
\underline{0} & -h_{1} \underline{I} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & +h_{1} \underline{I} & -h_{2} \underline{I} & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & +h_{1} \underline{I} & -h_{2} \underline{I} & \cdots & \underline{0} \\
\underline{0} & \underline{0} & +h_{2} \underline{I} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -h_{Nk} \underline{I} \\
\underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & +h_{Nk} \underline{I}
\end{pmatrix} \right)$$

$$(7.48)$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{3} = \alpha_{k} \operatorname{diag}\left(\operatorname{sign}\left(\underline{v_{M_{k}}}\right)\right) \cdot \left(\begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}_{A,1}^{*} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ +\underline{\underline{M}}_{A,1}^{*} & -\underline{\underline{M}}_{A,2}^{*} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & +\underline{\underline{M}}_{A,2}^{*} & \ddots & \vdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\underline{\underline{M}}_{A,N_{k}}^{*} & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & +\underline{\underline{M}}_{A,N_{k}}^{*} & \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{\underline{M}}_{A,1}^{*} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & +\underline{\underline{M}}_{A,1}^{*} & -\underline{\underline{M}}_{A,2}^{*} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & +\underline{\underline{M}}_{A,2}^{*} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\underline{\underline{M}}_{A,N_{k}}^{*} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & +\underline{\underline{M}}_{A,N_{k}}^{*} \end{bmatrix} \right) (7.49)$$

$$\underline{\Xi}_{3} = \alpha_{k} \operatorname{diag}\left(\operatorname{sign}\left(\underline{v_{M_{k}}}\right)\right) \begin{bmatrix} -h_{1}\underline{M}_{B,1}^{*} \\ \left(h_{1}\underline{M}_{B,1}^{*} - h_{2}\underline{M}_{B,2}^{*}\right) \\ \vdots \\ \left(h_{Nk-1}\underline{M}_{B,Nk-1}^{*} - h_{Nk}\underline{M}_{B,Nk}^{*}\right) \\ h_{Nk}\underline{M}_{B,Nk}^{*} \end{bmatrix}$$

$$(7.50)$$

A matriz $\underline{\underline{M}}_{A,i}^*$ e o vetor $\underline{\underline{M}}_{B,i}^*$, cujas integrações numéricas são feitas através do método de quadratura Gauss-Lagrange, são definidos como:

$$\underline{\underline{M}}_{A,i}^{*} = \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) d\theta$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,i}^{*} = \int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) d\theta$$
(7.51)

A integração numérica dos termos anteriores é descrita em detalhes no Apêndice III – Integração das Matrizes do Método de *Galerkin*.

7.6 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. A aproximação é obtida via série de Taylor.

O método é aplicado ao duto k de comprimento L_k através da discretização em N_k elementos de tamanho variável h_j delimitados pelo conjunto de nós j = 0, 1, ..., N, sendo o elemento j delimitado pelos nós j-1 e j.

O operador de diferenças finitas para derivada pode ser obtido a partir da série de Taylor para o vetor de funções $\underline{y}(t,x)$ possui a seguinte forma:

$$\underline{y}(t, x_j - h_j) = \underline{y}(t, x_j) + h_j \frac{\partial \underline{y}(t, x_j)}{\partial x} + \underline{o}(h_j)$$
(7.52)

Reorganizando esse operador de modo a gerar uma aproximação da derivada do vetor de funções y no nó j:

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_j)}{\partial x} \cong \frac{\underline{y}(t, x_j) - \underline{y}(t, x_j - h_j)}{h_i}$$
(7.53)

Nessa forma, a aproximação da derivada espacial no nó j utiliza o valor da função no nó *j*-1, sendo assim chamada método de diferenças descendentes (*upwind*).

Outras aproximações podem ser feitas utilizando-se o valor da função no nó a jusante, sendo então chamada de método de diferenças ascendentes:

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_j)}{\partial x} \cong \frac{\underline{y}(t, x_j + h_{j+1}) - \underline{y}(t, x_j)}{h_{j+1}}$$
(7.54)

Por último, pode-se ainda fazer uma aproximação onde tanto os valores a montante quanto a jusante são utilizados constituindo um método de diferenças centrais:

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_j)}{\partial x} \cong \frac{\underline{y}(t, x_j + h_{j+1}) - \underline{y}(t, x_j - h_j)}{h_{j+1} + h_j}$$

$$(7.55)$$

A resolução numérica segundo o método de diferenças finitas é realizada da mesma maneira descrita na Seção 7.3 referente ao método de elementos finitos, gerando um sistema de equações diferenciais ordinárias e suas condições iniciais com a mesma forma apresentada em (7.29).

7.6.1 Aproximação via diferenças centrais

Pela aproximação segundo diferenças centrais as derivadas temporal e espacial do vetor de funções y correspondem a:

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_{j})}{\partial t} \cong \underline{\dot{y}}_{j}(t)$$

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_{j})}{\partial x} = \frac{\underline{y}_{j+1}(t) - \underline{y}_{j-1}(t)}{h_{j+1} + h_{j}}$$
(7.56)

Substituindo a aproximação no modelo de escoamento tem-se:

$$\underline{\dot{y}_{j}}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{j}) \left(\frac{\underline{y}_{j+1}(t) - \underline{y}_{j-1}(t)}{h_{j+1} + h_{j}} \right) + \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{j}) = \underline{0}$$

$$(7.57)$$

Equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$h_{1} \underline{\dot{y}}_{0}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{0}) \underline{y}_{1}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{0}) \underline{y}_{0}(t) + h_{1} \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{0}) = \underline{0}$$

$$(h_{2} + h_{1}) \underline{\dot{y}}_{1}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{1}) \underline{y}_{2}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{1}) \underline{y}_{0}(t) + (h_{2} + h_{1}) \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{1}) = \underline{0}$$

$$(h_{3} + h_{2}) \underline{\dot{y}}_{2}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{2}) \underline{y}_{3}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{2}) \underline{y}_{1}(t) + (h_{3} + h_{2}) \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{2}) = \underline{0}$$

$$(h_{4} + h_{3}) \underline{\dot{y}}_{3}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{3}) \underline{y}_{4}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{3}) \underline{y}_{2}(t) + (h_{4} + h_{3}) \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{3}) = \underline{0}$$

$$\vdots$$

$$h_{Nk} \underline{\dot{y}}_{Nk}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{Nk}) \underline{y}_{Nk}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{Nk}) \underline{y}_{Nk-1}(t) + h_{Nk} \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{Nk}) = \underline{0}$$

$$(7.58)$$

que assumindo a mesma forma matricial descrita em (7.21), corresponde a uma matriz $\underline{\Theta}_k$ dada por (7.65), uma matriz $\underline{\Delta}_k$ dada por (7.66) e um vetor $\underline{\Xi}_k$ dado por (7.67):

$$\underline{\underline{\Theta}}_{k,1} = \underline{\underline{\Theta}}_{k,1} + \underline{\underline{\Theta}}_{k,2}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{k,1} = \begin{bmatrix}
h_1 \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} & & & & \\
\underline{\underline{O}} & h_2 \underline{\underline{I}} & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & \underline{\underline{O}} & h_{Nk} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} \\
\underline{\underline{O}} & & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}}
\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{k,2} = \begin{bmatrix}
\underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & & & \\
\underline{\underline{O}} & h_1 \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} & & & \\
\underline{\underline{O}} & h_2 \underline{\underline{I}} & & & & \\
& & & \underline{\underline{O}} & h_{Nk} \underline{\underline{I}}
\end{bmatrix}$$

$$(7.59)$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{k,2} = \underline{\underline{\Lambda}}_{k,1} + \underline{\underline{\Lambda}}_{k,2}$$

$$\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}_{k,1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{Q}}} & \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{0}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ \underline{\underline{\underline{Q}}} & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{1}) & \\ & & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-2}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ & & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-1}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{0}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{1}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{2}) & \\ & & & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-1}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ & & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-1}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \\ & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \underline{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{\underline{M}}}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{Q}}} & \underline{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{M}}}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{M}}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{M}}}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{M}}}_{$$

$$\underline{\Xi} = \begin{bmatrix} h_{1}\underline{M}_{B}(t,x_{0}) \\ (h_{1} + h_{2})\underline{M}_{B}(t,x_{1}) \\ \vdots \\ (h_{Nk-1} + h_{Nk})\underline{M}_{B}(t,x_{Nk-1}) \\ h_{Nk}\underline{M}_{B}(t,x_{Nk}) \end{bmatrix}$$
(7.61)

7.6.2 Aproximação upwind

Pela aproximação *upwind*, as derivadas temporal e espacial do vetor de funções \underline{y} correspondem a:

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_{j})}{\partial t} \cong \underline{\dot{y}}_{j}(t)$$

$$\frac{\partial \underline{y}(t, x_{j})}{\partial x} = \frac{\underline{y}_{j}(t) - \underline{y}_{j-1}(t)}{h_{i}}$$
(7.62)

Substituindo a aproximação no modelo de escoamento tem-se:

$$\underline{\dot{y}}_{j}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{j}) \left(\frac{\underline{y}_{j}(t) - \underline{y}_{j-1}(t)}{h_{j}} \right) + \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{j}) = \underline{0}$$
(7.63)

Equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$h_{1} \underline{\dot{y}_{0}} + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{0}) \underline{y_{1}}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{0}) \underline{y_{0}}(t) + h_{1} \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{0}) = \underline{0}$$

$$h_{1} \underline{\dot{y}_{1}} + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{1}) \underline{y_{1}}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{1}) \underline{y_{0}}(t) + h_{1} \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{1}) = \underline{0}$$

$$h_{2} \underline{\dot{y}_{2}} + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{2}) \underline{y_{2}}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{2}) \underline{y_{1}}(t) + h_{2} \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{2}) = \underline{0}$$

$$h_{3} \underline{\dot{y}_{3}} + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{3}) \underline{y_{3}}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{3}) \underline{y_{2}}(t) + h_{3} \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{3}) = \underline{0}$$

$$\vdots$$

$$(h_{Nk}) \underline{\dot{y}}_{Nk}(t) + \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{Nk}) \underline{y}_{Nk}(t) - \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{Nk}) \underline{y}_{Nk-1}(t) + (h_{Nk}) \underline{\underline{M}}_{B}(t, x_{Nk}) = \underline{0}$$

que assumindo a mesma forma matricial descrita em (7.21), corresponde a uma matriz $\underline{\Theta}_k$ dada por (7.65), uma matriz $\underline{\Lambda}_k$ dada por (7.66) e um vetor $\underline{\Xi}_k$ dado por (7.67):

$$\underline{\Theta}_{k} = \begin{bmatrix}
h_{1}\underline{I} & \underline{0} \\
\underline{0} & h_{1}\underline{I} \\
& & \ddots \\
& & h_{Nk-2}\underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\
& & \underline{0} & h_{Nk-1}\underline{I} & \underline{0} \\
& & \underline{0} & \underline{0} & h_{Nk}\underline{0}
\end{bmatrix}$$
(7.65)

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{k,1} = \underline{\underline{\Lambda}}_{k,1} + \underline{\underline{\Lambda}}_{k,2}$$

$$\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}_{k,1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{A}(t, x_{0}) \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{1}) \\ & \ddots \\ & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-2}) & \underline{\underline{\underline{0}}} & \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{0}}}} & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-1}) & \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{0}}}} & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}_{k,2} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{0}) & \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{1}) & \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{2}) \\ & \ddots \\ & \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk-1}) & \underline{\underline{\underline{0}}} & \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{0}}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{M}}}_{A}(t, x_{Nk}) & \underline{\underline{\underline{0}}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Xi}_{k} = \begin{bmatrix} h_{1}\underline{M}_{B}(t,x_{0}) \\ h_{1}\underline{M}_{B}(t,x_{1}) \\ \vdots \\ h_{Nk-1}\underline{M}_{B}(t,x_{Nk-1}) \\ h_{Nk}\underline{M}_{B}(t,x_{Nk}) \end{bmatrix}$$

$$(7.67)$$

8 AVALIAÇÕES E COMPARAÇÕES

8.1 VALIDAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Na ausência de soluções analíticas para problemas de escoamento bifásico serão utilizados dois modelos idealizados para avaliação do desempenho dos métodos numéricos: modelo invíscido de Burgers e modelo de águas rasas. Essa estratégia de avaliação foi proposta por Omgba-Essama (2004).

Os métodos de *Galerkin*, de *Petrov-Galerkin* e de diferenças finitas foram testados no modelo invíscido de Burgers (ver Subseção 8.1.1) e no modelo de águas rasas (ver Subseção 8.1.2).

8.1.1 Modelo invíscido de Burgers

O modelo de Burgers é composto por uma única equação diferencial parcial, com a variável de estado *v* correspondendo à velocidade axial do fluido escoando dentro de um duto, mostrada em (8.1). A simplicidade desse modelo possibilita a avaliação dos algoritmos sob a influência de gradientes severos e ondas de choque.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{8.1}$$

Considerando uma condição inicial dada por uma velocidade constante e igual à v_L à esquerda da coordenada de descontinuidade x_d e igual à v_R à direita da descontinuidade:

$$v(0,x) = \begin{cases} v_L, & x < x_d \\ v_R, & x \ge x_d \end{cases}$$
 (8.2)

Toro (1997) descreve a solução analítica para a equação de Burgers como sendo igual a:

$$\begin{cases}
v_{L} > v_{R}, \text{ se} \begin{cases} x < s \cdot t \Rightarrow v(t, x) = v_{L} \\ x \geq s \cdot t \Rightarrow v(t, x) = v_{R} \end{cases} \\
v_{L} \leq v_{R}, \text{ se} \begin{cases} x \leq v_{L} \cdot t \Rightarrow v(t, x) = v_{L} \\ v_{L} \cdot t < v < v_{R} \cdot t \Rightarrow v(t, x) = \frac{x}{t} \\ x \geq v_{R} \cdot t \Rightarrow v(t, x) = v_{R} \end{cases}$$
(8.3)

onde o parâmetro s é chamado velocidade da onda de choque, ou seja, velocidade na qual a descontinuidade se desloca e é calculado como sendo igual a média entre v_L e v_R .

Considerando um caso de onda de choque em um tubo de 2 m onde as velocidades iniciais são 1.0 m/s e 0.5 m/s para v_L e v_R , respectivamente, com posição da descontinuidade (x_d) de 0.2 m.

O método de *Galerkin*, por se tratar de um método de diferenças centrais apresentou uma solução altamente oscilatória para as condições simuladas não sendo então considerado nessa análise. Mesmo comportamento foi verificado quando aplicou-se o método de diferenças finitas utilizando a aproximação segundo diferenças centrais.

O método de diferenças finitas utilizando a aproximação *upwind* possibilitou a obtenção de uma solução próxima à solução numérica porém com difusão numérica, como pode ser verificado na Figura 8.1.

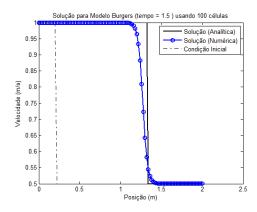


Figura 8.1. Burgers utilizando diferenças finitas upwind

O método de Petrov-Galerkin foi testado para diferentes fatores de upwind (α) apresentando um resultado muito próximo aos obtidos pelos métodos upwind avaliados por Omgba-Essama (2004). O melhor resultado foi obtido para o método Petrov-Galerkin com fator upwind igual a 1, ou seja, puramente upwind.

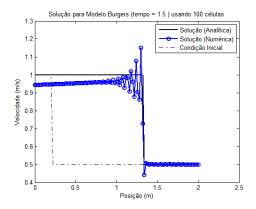


Figura 8.2. Burgers utilizando *Petrov-Galerkin* ($\alpha = 0.1$)

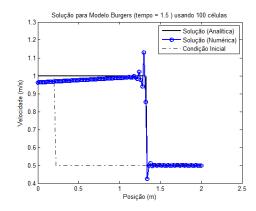


Figura 8.3. Burgers utilizando *Petrov-Galerkin* ($\alpha = 0.3$)

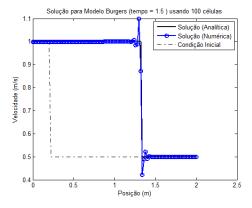


Figura 8.4. Burgers utilizando *Petrov-Galerkin* ($\alpha = 0.5$)

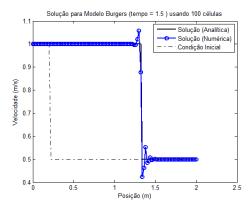


Figura 8.5. Burgers utilizando *Petrov-Galerkin* ($\alpha = 1.0$)

O resultado obtido para o método de *Petrov-Galerkin* com α igual a 0,5 foi muito semelhante aos resultados obtidos por Omgba-Essama (2004) utilizando métodos puramente *upwind* como os do tipo Rusanov.

8.1.2 Modelo de águas rasas

O modelo de águas rasas é composto por duas equações diferenciais parciais com as variáveis de estado v e h que correspondem, respectivamente, à velocidade axial do fluido e à altura do fluido em escoamento com superfície livre.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$
(8.4)

onde g é a aceleração da gravidade.

As condições iniciais consideradas nessa avaliação são chamadas de "quebra de comporta", que corresponde a uma ruptura brusca em uma barreira ao escoamento:

$$v(0,x) = 0$$

$$h(0,x) = \begin{cases} h_L, & x < x_d \\ h_R, & x \ge x_d \end{cases}$$
(8.5)

Louaked e Hanich (1998) apresentaram a seguinte solução analítica para esse problema:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & \frac{x - x_d}{t} \le -\sqrt{g h_L} \\ \left(\frac{2}{3}\right) \left(\sqrt{g h_L} + \frac{x - x_d}{t}\right), & -\sqrt{g h_L} < \frac{x - x_d}{t} \le \left(v_m - \sqrt{g h_m}\right) \\ v_m, & \left(v_m - \sqrt{g h_m}\right) < \frac{x - x_d}{t} \le s \\ 0, & s < \frac{x - x_d}{t} < \infty \end{cases}$$

$$h(t,x) = \begin{cases} h_L, & \frac{x - x_d}{t} \le -\sqrt{g h_L} \\ \left(\frac{1}{9g}\right) \left(2\sqrt{g h_L} - \frac{x - x_d}{t}\right)^2, & -\sqrt{g h_L} < \frac{x - x_d}{t} \le \left(v_m - \sqrt{g h_m}\right) \\ h_m, & \left(u_m - \sqrt{g h_m}\right) < \frac{x - x_d}{t} \le s \\ h_R, & s < \frac{x - x_d}{t} < \infty \end{cases}$$

$$(8.6)$$

onde s, v_m e h_m são obtidos através da solução do seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} h_{m} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8s^{2}}{gh_{R}}} - 1 \right) h_{R} \\ v_{m} = s - \frac{gh_{R}}{4s} \left(\sqrt{1 + \frac{8s^{2}}{gh_{R}}} + 1 \right) \\ v_{m} + 2\sqrt{gh_{m}} - 2\sqrt{gh_{L}} = 0 \end{cases}$$

$$(8.7)$$

A resolução desse problema considerando h_L igual a 0.75 m, h_D igual a 0.25 m, posição de descontinuidade x_d igual a 0.5 é apresentada nas figuras a seguir. A Figura 8.6 descreve a solução analítica, a Figura 8.7 mostra a solução numérica utilizando o método de *Galerkin* com 300 elementos e a Figura 8.8 o método de diferenças finitas centrais com 300 nós. Como é possível notar, ambos os métodos apresentaram soluções dispersivas para esse problema.

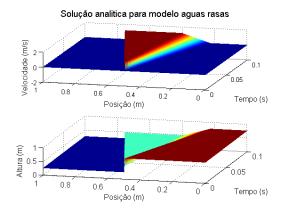


Figura 8.6. Solução analítica para o problema de quebra de comporta

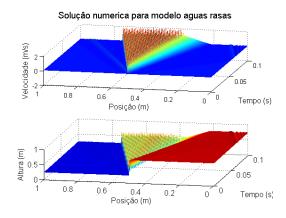


Figura 8.7. Solução numérica via Galerkin para o problema de quebra de comporta

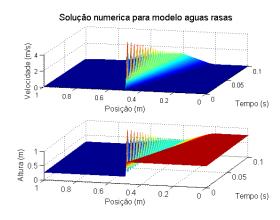


Figura 8.8. Solução Numérica via diferenças finitas centrais para o problema de quebra de comporta

Outros métodos, como *Petrov-Galerkin* e diferenças finitas *upwind*, foram avaliados porém os resultados obtidos foram altamente oscilatórios. Desse estudo é possível verificar que os métodos numéricos adotados nessa tese não são capazes de solucionar problemas em que há significativa descontinuidade. Porém, como nos casos práticos as descontinuidades são suavizadas pela viscosidade dos fluidos e pelo comportamento contínuo das condições de

contorno, pode-se considerar que os métodos numéricos propostos tendem a atender às necessidades exigidas pelos problemas de interesse dessa tese. Recomenda-se que em trabalhos futuros sejam explorados outros métodos mais adequados para problemas que envolvam descontinuidades.

8.2 VERIFICAÇÃO DO MODELO ESTACIONÁRIO

Com o objetivo de validar o modelo de escoamento bifásico utilizado, fez-se a comparação com um modelo simplificado desenvolvido por Taitel & Dukler (1976) para escoamento estacionário e estratificado. Esse modelo está descrito em detalhes no Apêndice V – Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976).

Para que seja possível a comparação entre os modelos, é necessário impor as seguintes simplificações adicionais ao modelo utilizado na tese:

- a) regime de escoamento estratificado para quaisquer que sejam as condições do escoamento;
- b) fluidos incompressíveis;
- c) escoamento laminar para ambas as fases, tal que o fator de atrito é calculado pela expressão $f_N = 16/Re_N$.
- d) fator de atrito da interface igual ao fator de atrito da fase gás.

Os seguintes parâmetros dos fluidos foram utilizados: massa específica do líquido de 860 kg/m³, viscosidade do líquido de 8 cP, massa específica do gás de 90 kg/m³, viscosidade do gás de 2 10⁻⁵ Pa.s. Considerou-se uma tubulação com diâmetro de 0.1 m para diferentes valores de inclinação.

O seguinte algoritmo de cálculo foi adotado:

- a) fixa-se uma determinada velocidade superficial da fase gás;
- b) gera-se um vetor de razões entre as alturas de filme e o diâmetro;
- c) calculam-se as velocidades superficiais da fase líquida e as perdas de carga totais utilizando o modelo descrito no Apêndice V – Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976);

- d) a partir das velocidades superficiais de gás e de líquido determinam-se as razões entre alturas de filme e diâmetro e as perdas de carga totais a partir do modelo estratificado estacionário;
- e) finalmente comparam-se as alturas de líquido / diâmetro e as perdas de carga para o modelo de Taitel & Dukler e para o modelo adotado na tese.

As Figuras 8.9, 8.10 e 8.11 comparam os resultados obtidos pelos modelos escritos no Capítulo 5 ao modelo simplificado de Taitel e Dukler (1976). Nota-se que na Figura 8.9 para a velocidade superficial do gás igual a 10 m/s, há um descolamento entre um dos pontos determinados pelo modelo estacionário e o modelo de Taitel e Dukler. Isso se deve a problemas de convergência do método numérico para solução do sistema de equações algébricas.

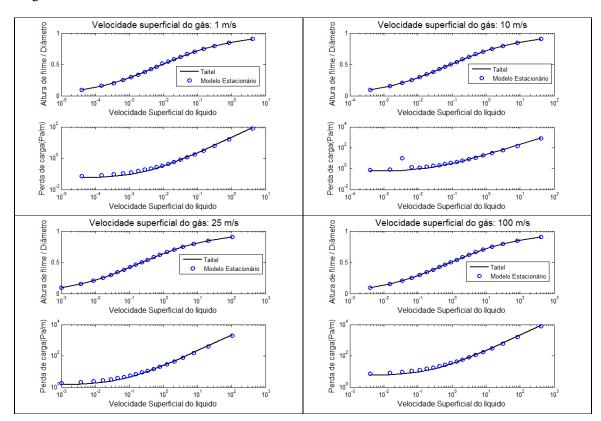


Figura 8.9. Comparação entre modelos estacionários estratificados horizontais ($\theta = 0^{\circ}$)

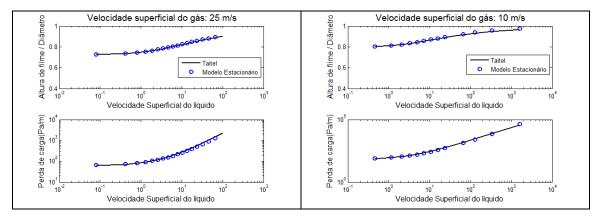


Figura 8.10. Comparação entre modelos estacionários estratificados ascendentes ($\theta = +0.5^{\circ}$)

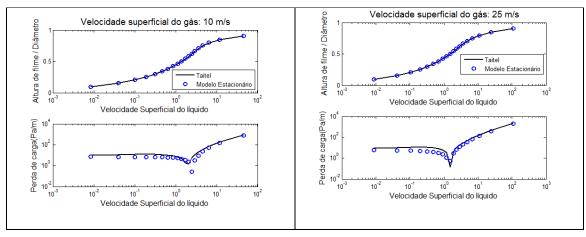


Figura 8.11. Comparação entre modelos estacionários estratificados descendentes (θ = - 0.5°)

Pode-se constatar que há considerável aderência entre os modelos, o que valida o modelo a 4 equações.

8.3 DETERMINAÇÃO DO MAPA DE PADRÕES DE ESCOAMENTO

A seguir, são apresentados mapas para diferentes inclinações considerando escoamento em regime estacionário de gás e óleo a uma pressão de 100 bar em um tubo liso de 0.1 m de diâmetro, massa específica do líquido de 860 kg/m³, viscosidade do líquido de 8 cP, massa específica do gás de 90 kg/m³, viscosidade do gás de 2·10⁻⁵ Pa·s e tensão interfacial de 0.03 Pa·m utilizando a metodologia descrita na Subseção 3.4.

As Figuras 8.12 a 8.19 comparam os mapas de escoamento calculados com o algoritmo descrito nessa tese (à esquerda) e os mapas de escoamento apresentados por Crowe (2006) para condições operacionais similares.

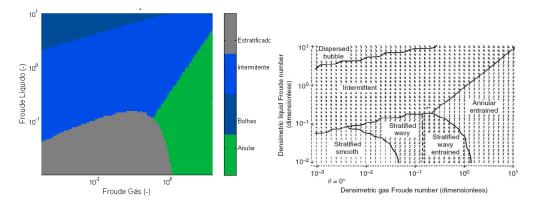


Figura 8.12. Escoamento horizontal

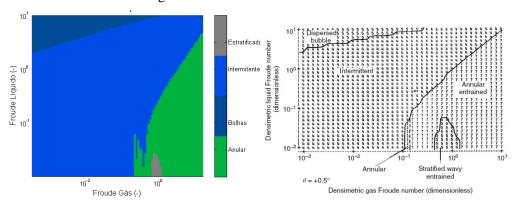


Figura 8.13. Escoamento inclinado ascendente $(+0.5^{\circ})$

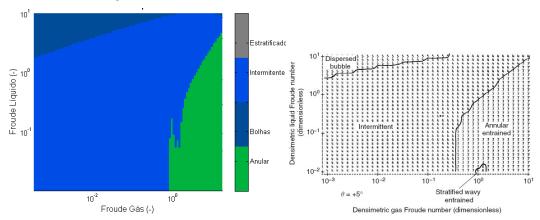


Figura 8.14. Escoamento inclinado ascendente (+5°)

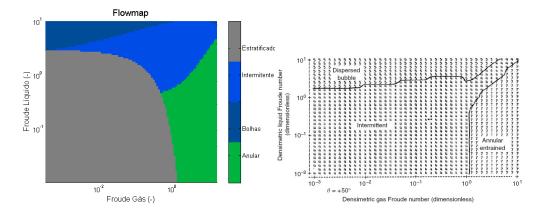


Figura 8.15. Escoamento inclinado ascendente (+50°)

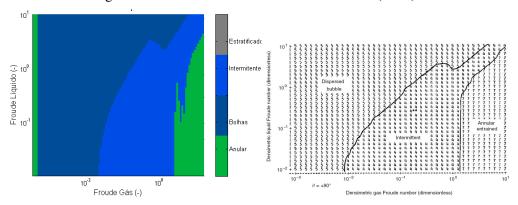


Figura 8.16. Escoamento vertical ascendente (+90°)

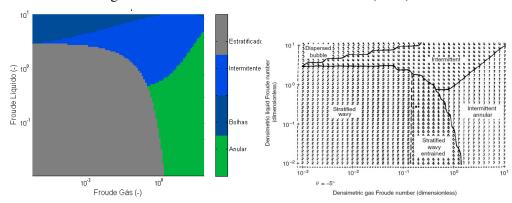


Figura 8.17. Escoamento inclinado descendente (-5°)

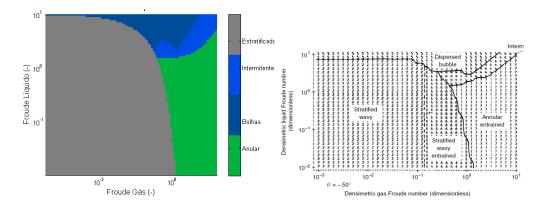


Figura 8.18. Escoamento inclinado descendente (-50°)

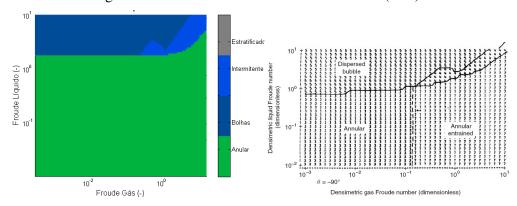


Figura 8.19. Escoamento inclinado descendente (-90°)

Esses mapas de padrões de escoamento mostram-se coerentes em comparação com os resultados descritos em Crowe (2006) o que valida o algoritmo de IPE descrito na Subseção 5.13.

9 MODELAGEM DINÂMICA DE REDES DE ESCOAMENTO BIFÁSICO

9.1 INTRODUÇÃO

As redes de escoamento são constituídas de um conjunto de elementos como tubulações, válvulas, compressores e bombas interconectados com o objetivo de transportar fluidos entre pontos de fornecimento e de consumo. No caso de redes de escoamento bifásico, podemos citar os complexos sistemas submarinos para exploração de petróleo onde diversos poços produtores são conectados entre si e sua produção é transportada até uma plataforma na superfície.

O problema de escoamento gás-líquido foi amplamente estudado nas décadas passadas acompanhando o crescimento vertiginoso na demanda por soluções de engenharia para desafios tecnológicos cada vez mais complexos.

A grande maioria dos estudos tem como foco a análise do comportamento bifásico em um único duto. Raras contribuições se destacam em relação à simulação de redes de escoamento bifásico, tema esse que foi apenas explorado pelas empresas de desenvolvimento de *softwares* comerciais para escoamento bifásico, entretanto sem divulgação na literatura aberta.

Tendo como motivação a escassez de estudos com o enfoque em redes de dutos bifásicos, essa tese apresenta uma metodologia de modelagem de redes de escoamento bifásico que possibilita a simulação de um conjunto de dutos de transporte de líquido e gás interligados, extremamente comum em sistemas de produção de petróleo.

O desenvolvimento de um modelo capaz de representar adequadamente a complexidade das interconexões entre os elementos que constituem uma rede de dutos requer uma metodologia sistemática baseada na representação através de digrafos. Esse trabalho utiliza a mesma notação apresentada por Mah (1990) e Costa et al. (1998), onde uma rede é composta por N vértices e S arestas, onde se define aresta como sendo o elemento capaz de transportar informação e vértice como sendo o elemento capaz de gerar/consumir fluido. A Figura 9.1 apresenta um exemplo de digrafo dotado de 5 vértices e 6 arestas.

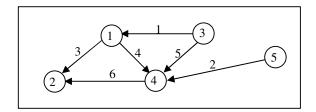


Figura 9.1. Exemplo de digrafo

Os vértices são responsáveis pelas especificações das condições de contorno das EDP's calculadas ao longo das arestas, tendo como objetivo a modelagem de poços, pontos de geração/consumo e conexões entre tubulações. Podem ser de dois tipos:

- a) Vértices dinâmicos ou do tipo A: modelados através de equações dinâmicas de balanço de massa de cada fase (equações diferenciais ordinárias) onde as variáveis de estado são pressão e hold-up. Possibilitam a especificação de condições de contorno de pressão e fração de área de gás nas extremidades das tubulações conectadas a esses vértices. Esses vértices podem ser utilizados com dois objetivos:
 (i) interconectar dois ou mais trechos de tubulação ou (ii) modelar vasos de separação;
- b) Vértices estáticos ou do tipo B: responsáveis pelas especificações das condições de contorno.

A interligação de arestas e vértices é feita através de uma matriz de incidência com atribuição de orientação das arestas de modo que valores negativos de vazão indicam um escoamento no sentido contrário à orientação adotada.

A estrutura na forma de redes implica na utilização de especificações de vértices para representar todo o comportamento da rede. Cada vértice é dotado de um vetor de especificações \underline{E}_k com quatro variáveis que podem ser utilizadas como condições de contorno para fração de área de gás (α_G) , pressão (p), vazão de entrada de líquido (q_L) e vazão de entrada de gás (q_G) . O vetor de especificações da rede \underline{E} é formado pelo concatenamento de todos os vetores \underline{E}_k .

9.2 VÉRTICE DINÂMICO

Os vértices dinâmicos ou do tipo A são modelados através de um balanço de massa em cada fase constituído de um par de equações diferenciais ordinárias e tendo como duas

variáveis de estado a pressão adimensional $P_{T,k}$ e o *hold-up* de gás $H_{G,k}$. As equações diferenciais que compõem o modelo desses vértices estão descritas em (9.1) e (9.2).

$$V_{k} \frac{\partial \left(\rho_{L,k} H_{L,k}\right)}{\partial t} = Q_{L,IN,k} - Q_{L,OUT,k} + W_{L,k}$$

$$\tag{9.1}$$

$$V_{k} \frac{\partial \left(\rho_{G,k} H_{G,k}\right)}{\partial t} = Q_{G,IN,k} - Q_{G,OUT,k} + W_{G,k}$$

$$\tag{9.2}$$

onde V_k é o volume do vértice k em m³, $W_{N,k}$ é a vazão mássica externa da fase N no vértice k em kg/s, onde valores positivos significam entrada de massa no vértice e valores negativos saída, $Q_{N,IN,k}$ é o somatório das vazões mássicas da fase N das extremidades de saída das arestas (linhas) que chegam ao vértice k (conforme orientação previamente definida para o digrafo da rede de escoamento) em kg/s, $Q_{N,OUT,k}$ é o somatório das vazões mássicas da fase N das extremidades de entrada das arestas (linhas) que saem do vértice k (conforme orientação previamente definida para o digrafo da rede de escoamento) em kg/s, $H_{N,k}$ é o hold-up de fase N no vértice k e $p_{N,k}$ é a densidade da fase N no vértice k em kg/m³.

É importante reforçar que a metodologia proposta requer uma definição preliminar da orientação das arestas da rede de escoamento como uma referência para a organização dos elementos dessa rede. No entanto, a metodologia proposta permite que essa orientação seja contrariada e que ocorram vazões negativas, ou seja, contrárias à orientação das arestas, a depender das condições de contorno impostas ao problema de interesse.

Após algumas transformações, as equações ficam com a seguinte forma:

$$\frac{\partial H_{G,k}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{G,k}} \left(1 - \frac{1 + \frac{\tau_{G,k}}{\tau_{L,k}}}{1 + \frac{p_{G,k}}{p_{L,k}}} \right)
\frac{\partial P_{T,k}}{\partial t} = \frac{p_{G,k}}{P_R \tau_{G,k}} \left(1 - \frac{1 + \frac{\tau_{G,k}}{\tau_{L,k}}}{1 + \frac{p_{G,k}}{p_{L,k}}} \right)$$
(9.3)

onde $\tau_{N,k}$ corresponde ao tempo de residência da fase N no vértice k e $p_{N,k}$ corresponde ao inverso da compressibilidade relativa da fase N no vértice k, calculados através das seguintes expressões:

$$\tau_{N,k} = \left(\frac{Q_{N,IN,k} - Q_{N,OUT,k} + W_{N,k}}{\rho_{L,k} V_k}\right)^{-1}$$
(9.4)

$$p_{N,k} = \left(\frac{H_{N,k}}{\rho_{N,k}} \frac{\partial \rho_N}{\partial P}\right)^{-1} \tag{9.5}$$

As vazões internas que entram e saem dos vértices caracterizadas pelos vetores $Q_{L,IN}$, $Q_{G,IN}$, $Q_{L,OUT}$ e $Q_{G,OUT}$ são determinadas a partir das vazões nas extremidades das arestas utilizando matrizes de incidência conforme as seguintes identidades matriciais:

$$\underline{Q}_{N,IN} = \underline{\underline{MI}}_{IN} \underline{q}_{N,OUT}
\underline{Q}_{N,OUT} = \underline{\underline{MI}}_{OUT} \underline{q}_{N,IN}$$
(9.6)

onde $\underline{q}_{N,OUT}$ é o vetor de vazões da fase N na extremidade de saída de cada aresta, $\underline{q}_{N,IN}$ é o vetor de vazões da fase N na extremidade de entrada de cada aresta e $\underline{M}_{,IN}$ e \underline{MI}_{OUT} são matrizes de incidência que representam a conectividade entre vértices do tipo A e arestas (matrizes com número de linhas igual ao número de vértices do tipo A e número de colunas igual ao número de arestas) com as seguintes regras de formação:

- a) O elemento da linha *i* e coluna *j* da matriz <u>MI</u>_{IN} é igual 1 se o *i*-ésimo vértice estiver conectado à saída da *j*-ésima aresta, do contrário é igual a 0;
- b) O elemento da linha i e coluna j da matriz \underline{MI}_{OUT} é igual 1 se o i-ésimo vértice estiver conectado à entrada da j-ésima aresta, do contrário é igual a 0.

Os vértices do tipo A são responsáveis pela definição de condições de contorno dinâmicas para pressão e/ou hold-up de gás das arestas. Esse tipo de vértice pode ser utilizado para conectar duas ou mais arestas (especificação simples) e também para modelar uma válvula de retenção (especificação de válvula de retenção).

9.2.1 Especificações simples

As especificações simples para o vértice k do tipo A correspondem às vazões externas $W_{L,k}$ e $W_{G,k}$ que pela imposição dos estados do vértice dinâmico sofrem a seguinte transformação:

$$\underline{E}_{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_{L,k} \\ W_{G,k} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Vertice A}} \begin{bmatrix} H_{G,k} \\ P_{T,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (9.7)

9.2.2 Especificações de válvula de retenção

As válvulas de retenção são componentes comumente encontrados nas redes de escoamento e têm como finalidade impedir o fluxo reverso do fluido, ou seja, em uma aresta onde a válvula de retenção estiver instalada a orientação do escoamento é sempre igual à orientação da válvula de retenção.

As especificações de válvula de retenção são feitas em duas transformações consecutivas: na primeira, é feita a determinação das vazões externas de líquido e gás $W_{L,k}$ e $W_{G,k}$ calculadas através da pressão do vértice $P_{T,k}$, da pressão externa e do *hold-up* do vértice $H_{G,k}$; e, na segunda, é feita a aplicação da especificação simples, como mostrado em (9.8).

$$\underline{E}_{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{T,EXT,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Válvula}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_{L,k} \\ W_{G,k} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Vertice A}} \begin{bmatrix} H_{G,k} \\ P_{T,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(9.8)$$

As vazões externas $W_{L,k}$ e $W_{G,k}$ são obtidas através da vazão externa da mistura $W_{M,k}$ em kg/s através das seguintes equações:

$$W_{L,k} = (1 - H_{G,k}) W_{M,k}$$

$$W_{G,k} = H_{G,k} W_{M,k}$$
(9.9)

A vazão mássica externa da mistura é determinada segundo (Perry, 1997):

$$W_{M,k} = \begin{cases} 0.0075 \, C_{V,k} \left(abs \left(\Delta p_k \right) \rho_{M,k} \right)^{1/2}, \text{ se } \Delta p_k > 0 \\ 0, \text{ se } \Delta p_k \le 0 \end{cases}$$
 (9.10)

onde $C_{V,k}$ é o coeficiente da válvula expresso em galões por minuto (GPM) de água a 60 °F com perda de carga de 1 lbf/in², $\rho_{M,k}$ é a densidade da mistura calculada na pressão média em kg/m³:

$$\Delta p_k = \frac{P_R}{10^6} \left(P_{T,k} - P_{T,EXT,k} \right) \tag{9.11}$$

$$\rho_{M,k} = (1 - H_{G,k}) \rho_{G,k} + H_{L,k} \rho_{L,k}$$
(9.12)

9.3 VÉRTICE ESTÁTICO

Conforme descrito anteriormente, os vértices do tipo B são responsáveis pela definição de condições de contorno das arestas e assumem vital importância na especificação da rede de escoamento. Podem ter até quatro especificações simples. Além disso podem ser feitas especificações especiais, que são transformações realizadas sobre as especificações simples com o objetivo de descrever elementos como válvulas e reservatórios.

9.3.1 Especificações simples

São fornecidas funções temporais para as variáveis fração de área de gás, pressão e/ou vazões mássicas a serem transferidas na forma de condições de contorno para as arestas. Essas quatro variáveis estão disponíveis para especificação, porém, é importante frisar, que apenas um determinado número torna-se necessário para que a rede de escoamento esteja devidamente especificada. Com o objetivo de simplificar a notação, a representação do vetor de especificações será descrito considerando todas as quatro variáveis para cada vértice sendo a seleção das variáveis realizada através de matrizes de seleção de condições de contorno a ser definida posteriormente.

O vetor de especificações simples para o vértice k pode ser escrito como:

$$\underline{\underline{E}}_{k} = \begin{bmatrix} \alpha_{G,B,k} & P_{T,B,k} & q_{L,B,k} & q_{G,B,k} \end{bmatrix}^{T}$$
(9.13)

9.3.2 Especificações de reservatório

Os reservatórios de petróleo podem ser considerados como sendo zonas em que o petróleo e o gás se encontram a uma pressão denominada pressão de reservatório ($P_{res,k}$). A vazão de retirada do petróleo e de gás de um reservatório k são proporcionais à diferença entre

a pressão do reservatório ($P_{res,k}$) e a pressão na entrada da tubulação do poço ($P_{T,k}$), onde o fator de proporcionalidade é o chamado índice de produção do reservatório (IP).

Para modelar um vértice, que represente um reservatório de petróleo, conectado a um trecho de tubulação, que represente o poço de petróleo, são necessárias especificações de vazão de gás e de líquido calculadas em função da pressão na entrada da aresta e parâmetros como a pressão de reservatório, o índice de produção de líquido e o índice de produção de gás. Esses vértices estão localizados na entrada de um trecho de tubulação para descrever reservatórios de petróleo.

Sendo as vazões geradas no reservatório ($q_{res,L,k}$ e $q_{res,G,k}$) calculadas através da pressão do reservatório $P_{res,k}$ em bar e dos índices de produção $IP_{L,k}$ e $IP_{G,k}$ em kg/s/bar através das seguintes equações:

$$q_{res,L,k} = IP_{L,k} \left(P_{res,k} - 10^{-5} P_R P_{T,k} \right)$$
(9.14)

$$q_{res,G,k} = IP_{G,k} \left(P_{res,k} - 10^{-5} P_R P_{T,k} \right)$$
(9.15)

onde P_R é um fator de ponderação utilizado no modelo de escoamento e $P_{T,k}$ é a pressão adimensional na entrada da aresta que está conectada ao vértice k. É possível obter uma forma matricial:

$$\underline{\underline{P}}_{T} = \underline{\underline{MI}}_{OUT} \underline{\underline{P}}_{T,IN} \tag{9.16}$$

tal que, $\underline{P}_{T,IN}$ é o vetor de pressões adimensionais na extremidade de entrada de cada aresta e \underline{MI}_{OUT} é uma matriz de incidência definida na Subseção 9.2.

A transformação do vetor de especificações para o vértice k pela imposição da especificação especial do tipo reservatório é descrita como:

$$\underline{E}_{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{reservat\'{o}rio} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{res,L,k} \\ q_{res,G,k} \end{bmatrix}$$
(9.17)

9.3.3 Especificações de válvula

Especificações de pressão calculadas a partir das vazões de gás e de líquido na saída da aresta e de parâmetros como pressão na descarga do vértice (válvula) e coeficiente da válvula. Esses vértices estão localizados na saída de um trecho de tubulação para descrever uma válvula.

Sendo a pressão a montante da válvula $P_{T, val, k}$ calculada através da pressão a jusante da válvula $P_{T, k}$ e da queda de pressão através da válvula Δp_k em bar, do coeficiente da válvula CV_k conforme:

$$P_{T,val,k} = \left(P_{T,k} + \frac{10^5}{P_R} \Delta p_k\right)$$
 (9.18)

onde P_R é um fator de ponderação utilizado no modelo de escoamento.

A queda de pressão através da válvula é obtida através do seguinte modelo de válvula:

$$\Delta p_{k} = \frac{q_{M,k} \left| q_{M,k} \right|}{\rho_{M,k} \left(0.0075 \ x_{k} C_{V,k} \right)^{2}} \tag{9.19}$$

onde x_k é a abertura da válvula, $C_{V,k}$ é o coeficiente da válvula expresso em galões por minuto (GPM) de água a 60 °F com perda de carga de 1 lbf/in², $\rho_{M,k}$ é a densidade da mistura calculada na pressão média em kg/m³ e $q_{M,k}$ é a vazão mássica de mistura em kg/s dada por:

$$q_{M,k} = Q_{L,IN,k} + Q_{G,IN,k} (9.20)$$

As variáveis $Q_{L,IN,k}$ e $Q_{G,IN,k}$ são vazões que chegam ao vértices e correspondem a vazões na saída da aresta que está conectada ao vértice k. É possível obter uma forma matricial:

$$\underline{Q}_{L,IN} = \underline{\underline{MI}}_{B,IN} \underline{q}_{L,OUT}
\underline{Q}_{G,IN} = \underline{\underline{MI}}_{B,IN} \underline{q}_{G,OUT}$$
(9.21)

onde $\underline{q}_{L,OUT}$ e $q_{G,OUT}$ são os vetores de vazões na extremidade de saída de cada aresta e $\underline{MI}_{B,IN}$ é uma matriz de incidência que representa a conectividade entre vértices do tipo B e arestas (matrizes com número de linhas igual ao número de vértices do tipo B e número de colunas igual ao número de arestas) com as seguintes regras de formação: o elemento da linha i e

coluna j da matriz $\underline{MI}_{B,IN}$ é igual 1 se o i-ésimo vértice do tipo B estiver conectado à saída da j-ésima aresta, do contrário é igual a 0.

A transformação do vetor de especificações para o vértice k pela imposição da especificação especial do tipo válvula é descrita como:

$$\underline{E}_{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{T,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{v \acute{a}l v u l a} \begin{bmatrix} 0 \\ P_{v al,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(9.22)$$

9.4 CONEXÕES ENTRE VÉRTICES

Uma das formas de conectar duas arestas consiste no cruzamento entre as especificações de vértices instalados nas extremidades dessas arestas de modo a garantir o fechamento do balanço de massa entre duas tubulações pela especificação de condições de contorno de pressão na extremidade final da aresta a montante e de vazões mássicas na extremidade inicial da aresta a jusante.

Seja, por exemplo, um arranjo conforme mostrado na figura a seguir, onde o vértice *a* e o vértice *b* são conectados através da especificação de conexão *e*:

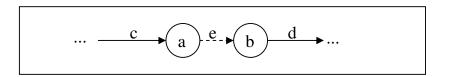


Figura 9.2. Representação esquemática de uma conexão

As transformações dos vetores de especificações para os vértices a e b pela imposição da conexão e podem ser descritas como:

$$\underline{E}_{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{T,a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{conexão} \begin{bmatrix} 0 \\ P_{T,IN,d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (9.23)

$$\underline{E}_{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{L,b} \\ q_{L,b} \end{bmatrix} \xrightarrow{conexão} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{L,OUT,c} \\ q_{G,OUT,c} \end{bmatrix}$$
(9.24)

9.5 ARESTA

As arestas são responsáveis pelo deslocamento de fluido entre os vértices e, no âmbito desta tese, correspondem a trechos de tubulação. Algumas abordagens consideram válvulas na forma de arestas, porém optou-se pela considerá-las através de uma especificação especial sobre um vértice.

A k-ésima aresta é descrita através do vetor de variáveis de estado nodais \underline{Y}_k com dimensão ne_k (N_k+1)x1, onde ne_k é o número de variáveis de estados do modelo utilizado para descrever o escoamento (sendo ne_k igual a 2 se for utilizado o modelo monofásico descrito no Capítulo 4, igual a 4 se for utilizado o modelo a dois fluidos descrito no Capítulo 5 e é igual a 3 se for utilizado o modelo de mistura detalhado no Capítulo 6).

Os valores das variáveis de estado na extremidade de entrada das arestas são descritos através dos vetores $\underline{\alpha}_{G,IN}$, $\underline{P}_{T,IN}$, $\underline{q}_{L,IN}$ e $\underline{q}_{G,IN}$ e na extremidade de saída das arestas são descritos pelos vetores $\underline{\alpha}_{G,OUT}$, $\underline{P}_{T,OUT}$, $\underline{q}_{L,OUT}$ e $\underline{q}_{G,OUT}$.

As variáveis de estado dessas arestas estão sujeitas a três possibilidades em termos de condição de contorno nas extremidades dos trechos de tubulação: (i) ausência de condição de contorno, (ii) von Neumann, ou seja, gradiente nulo para a variável especificada e (iii) Dirichlet, ou seja, valor da variável de estado é obtido através do vértice conectado à extremidade correspondente do trecho de tubulação.

A imposição de condições de contorno *Dirichlet* reduz o número de variáveis de estado do k-ésimo trecho de tubulação gerando o chamado vetor de estados reduzidos \underline{W}_k . A atribuição de condição de contorno *Dirichlet* é feita através do vetor de especificação dos vértices do tipo B (\underline{E}_B) e do vetor de estados dos vértices do tipo A (\underline{Y}_A).

As condições de contorno *von Neumann*, ou seja, gradiente nulo, são consideradas através da imposição de que o valor da variável nodal seja igual à variável nodal "vizinha", ou

seja, mais próxima. A atribuição de condição de contorno *von Neumann* é feita através do vetor de estados reduzidos do duto (W_k) .

O modelo da k-ésima aresta discretizada é dado pela Equação (7.29), onde a aplicação das condição de contorno é resumida pelo vetor \underline{C}_k de condições de contorno que tem a mesma dimensão do vetor de estados nodais da aresta k e valores não nulos apenas nas posições correspondentes aos estados nodais a serem substituídos por valores especificações segundo condição de contorno *Dirichlet* ou *von Neumann*. O vetor \underline{C}_k é então obtido através do vetor de especificações \underline{E} e do vetor de estados nodais reduzidos \underline{W}_k através da seguinte equação:

$$\underline{C}_{k}(t) = \underline{S}_{\underline{E}_{k}} \underline{E}(t) + \underline{S}_{\underline{Neu}_{k}} \underline{W}_{k}(t)$$
(9.25)

onde as matrizes seletoras $\underline{\underline{S}_{E}}_{k}$ e $\underline{\underline{S}_{Neu}}_{k}$ possuem as seguintes regras de formação:

- a) O elemento da linha i e coluna j da matriz $\underline{\underline{S}_E}_k$ é igual 1 se a i-ésima variável nodal da k-ésima aresta corresponde à j-ésima especificação de vértices, caso contrário é igual a 0;
- b) O elemento da linha i e coluna j da matriz $\underline{\underline{S_{Neu}}}_k$ é igual a 1 se a i-ésima variável nodal da k-ésima aresta corresponde à j-ésima variável nodal (vizinha) da mesma aresta, caso contrário é igual a 0.

9.6 SISTEMA DE EQUAÇÕES DA REDE

O modelo da rede de escoamento é composto por equações diferenciais ordinárias oriundas da discretização dos *m* trechos de dutos e dos modelos dos *NA* vértices dinâmicos (tipo A). Sendo assim, o vetor de variáveis de estados da rede de escoamento é descrito por:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{W}_{1}^{T} & \dots & \underline{W}_{m}^{T} & H_{G,1} & \dots & H_{G,n_{A}} & P_{T,1} & \dots & P_{T,n_{A}} \end{bmatrix}^{T}$$

$$(9.26)$$

O número de estados reduzidos da rede de escoamento (n_{REDE}) depende do número de elementos finitos de cada aresta (N_k), do número de estados do modelo (ne_k) do número de condições de contorno do tipo Dirichlet ($Ndir_k$) e do tipo von Neumann ($Nneu_k$) e do número de vértices do tipo A (n_A):

$$n_{REDE} = 2n_A + \sum_{k=1}^{m} \left(ne_k \left(N_k + 1 \right) - \left(Ndir_k + Nneu_k \right) \right)$$
 (9.27)

Desta forma, o grande sistema de equações diferenciais e suas respectivas condições iniciais são:

$$\underline{\dot{Q}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{W}}_{1}^{T} & \dots & \underline{\dot{W}}_{m}^{T} & \dot{H}_{G,1} & \dots & \dot{H}_{G,n_{A}} & \dot{P}_{T,1} & \dots & \dot{P}_{T,n_{A}} \end{bmatrix}^{T}
\underline{Q}(0) = \begin{bmatrix} \underline{W}_{1}^{T}(0) & \dots & \underline{W}_{m}^{T}(0) & H_{G,1}(0) & \dots & H_{G,n_{A}}(0) & P_{T,1}(0) & \dots & P_{T,n_{A}}(0) \end{bmatrix}^{T}$$
(9.28)

Devido à natureza do escoamento bifásico, esse sistema de equações diferenciais ordinárias é rígido. Ashino *et at.*(2000) definem um sistema rígido de EDO's como sendo um sistema em que pelo menos uma das quatro características a seguir é observada:

- I) Um sistema linear e de coeficientes constantes é rígido se todos os autovalores têm parte real negativa e a razão de rigidez é elevada. A razão de rigidez pode ser definida como a razão entre o valor máximo da parte real dos autovalores e o valor mínimo da parte real dos autovalores.
- II) Rigidez ocorre quando a exigência de estabilidade é mais forte que a necessidade de precisão, restringindo o passo de integração.
- III) Rigidez ocorre quando alguns componentes da solução decaem muito mais rapidamente que outros.
- IV) O sistema é dito rígido dentro de um intervalo I contendo t se o módulo da derivada da solução na vizinhança de t é muito maior que o módulo da derivada da solução no intervalo I.

No problema em questão, a característica I não é válida pois o sistema é não linear. A natureza oscilatória em diversos cenários de escoamento bifásicos, como, por exemplo, a intermitência severa, reforçam a validade da característica II. A velocidade de propagação das

ondas de pressão é muito superior à velocidade de propagação da fração de área de gás o que reforça a característica III. Por fim, observa-se a validade de IV em situações limites quando há desaparecimento de uma das fases. Logo, o modelo bifásico implica em um sistema discretizado na forma de EDO's com propriedades rígidas.

Como métodos de integração de EDO's do tipo Euler possuem um desempenho muito inferior aos métodos do tipo BDF (*Backward Differentiation Formula*) e NDF (*Numerical Differentiation Formulas*) para problemas rígidos, utilizou-se a rotina ode15s do MATLAB® R12. Segundo recomendado em Ashino et al. (2000), para uma mesma ordem de aproximação para a derivada o método NDF permite um passo de integração maior que o BDF, logo se optou pelo uso do NDF nas integrações realizadas nessa tese. Além disso, adotou-se uma ordem de aproximação igual a 2 já que, como o problema possui características oscilatórias, ordens de aproximação superiores podem gerar oscilações espúrias, conforme descrito no manual do MATLAB®.

O sistema de equações diferenciais ordinárias produz como subproduto um modelo estacionário para o escoamento bifásico em uma rede de dutos a partir da solução do seguinte sistema algébrico:

$$\dot{Q} = \underline{0} \tag{9.29}$$

Esse sistema de equações algébricas é resolvido utilizando-se o método de Newton-Raphson em que a estimativa inicial é gerada através do modelo estacionário incompressível de escoamento bifásico apresentado no Capítulo 11.

9.7 SOFTWARE DE SIMULAÇÃO DINÂMICA DE REDES BIFÁSICAS

Diante da complexidade dos modelos e, principalmente, da dificuldade gerada pela representação das redes de escoamento, o desenvolvimento dessa tese exigiu a confecção de um simulador de modo a simplificar a execução dos estudos de casos. Esse simulador, denominado SDMPFLOW (Simulador Dinâmico de Escoamento Multifásico), possui todos os modelos e métodos descritos até o presente capítulo.

Uma interface gráfica amigável permite ao usuário:

 a) desenvolver os modelos para qualquer topologia de rede e configurar todos os parâmetros sem a necessidade de utilizar qualquer linha de comando;

- b) salvar os modelos e os resultados em um arquivo para visualização posterior;
- visualizar os resultados através de gráficos tridimensionais, curvas de nível,
 perfis em função da posição e do tempo, além de animações e vídeos;

A tela inicial do SDMPFLOW está apresentada na Figura 9.3. As Figuras 9.4 a 9.11 corresponde às telas de configuração dos parâmetros do simulador. A Figura 9.12 é referente à tela de visualização dos resultados da simulação.

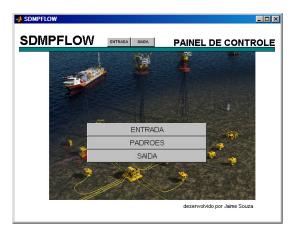


Figura 9.3. Tela Inicial do Simulador

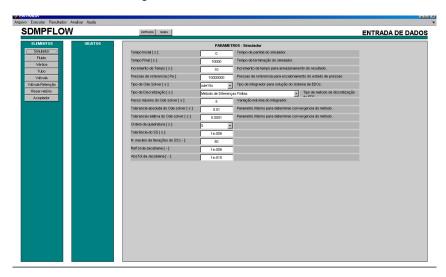


Figura 9.4. Tela de configuração dos métodos numéricos

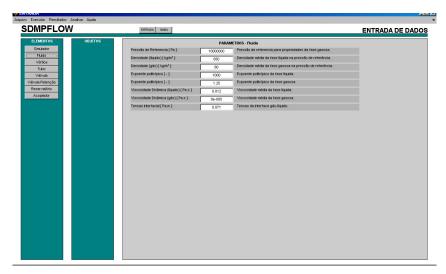


Figura 9.5. Tela de configuração dos fluidos

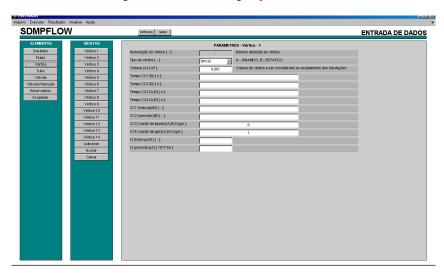


Figura 9.6. Tela de configuração dos vértices

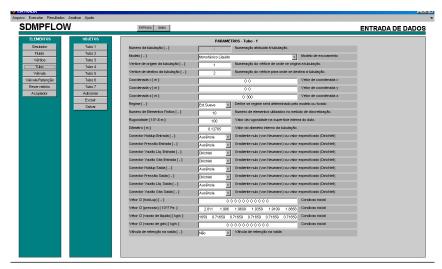


Figura 9.7. Tela de configuração das arestas

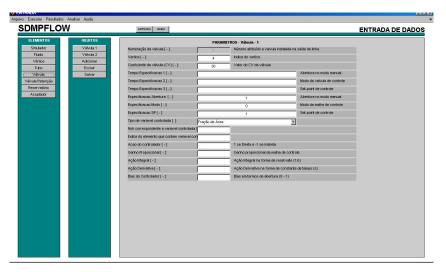


Figura 9.8. Tela de configuração das especificações do tipo válvula

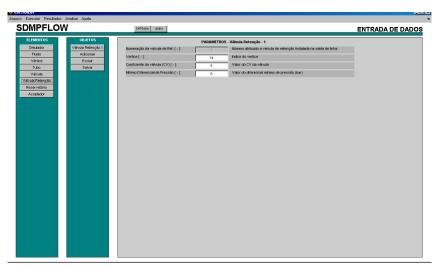


Figura 9.9. Tela de configuração das especificações do tipo válvula de retenção

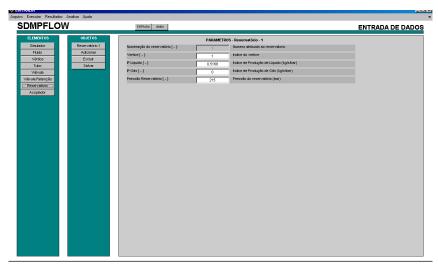


Figura 9.10. Tela de configuração de especificações do tipo reservatório

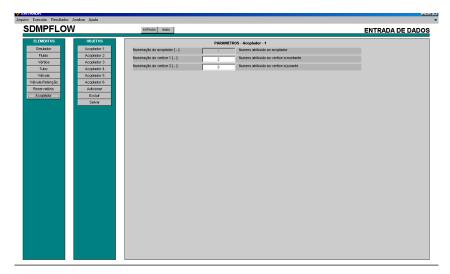


Figura 9.11. Tela de configuração de acoplamentos entre vértices

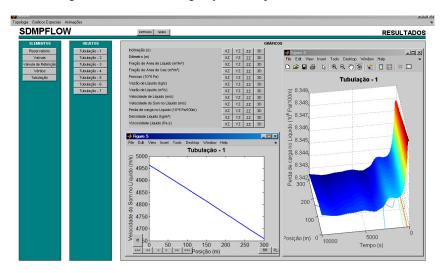


Figura 9.12. Tela de visualização de resultados

Esse simulador foi completamente desenvolvido em ambiente MATLAB ®, inclusive sua interface gráfica, e é composto pelas seguintes rotinas:

- a) analisador: função que permite analisar os autovalores da matriz Jacobiana das EDO's;
- b) arvore_dados: função que compõe a estrutura dos dados de entrada e a arvore de dados;
- c) arvore_saidas: função que compõe os nomes de todas as saídas do modelo;
- d) calcula_nivel_estratificado: função que determina a razão entre altura de líquido e diâmetro para escoamento estratificado;

- e) calculos_iniciais: função que executa cálculos iniciais dos parâmetros a serem utilizados pelos modelos;
- f) desativaRegime: função que desativa o regime de escoamento forçando um regime previamente estipulado pelo usuário;
- g) determinaAlfaEstavel: função que determina frações de área para modelos de Taitel,
 Pots e Zuber;
- h) fator: função que gera fatores de atrito de Fanning para as fases;
- i) filtra_entradas: função que filtra os valores gerados pelos modelos de fechamento;
- j) identificaRegime: função que executa a IPE e gera as variáveis identificadoras para frações de áreas definidas;
- k) identificaRegimeEstavel: função que executa a IPE e gera as variáveis identificadoras para frações de áreas calculadas pelos modelos de Taitel, Pots e Zuber;
- 1) mfreg: interface gráfica para análise dos padrões de escoamento;
- m) mfsim: interface gráfica para tela de abertura do programa;
- n) mfsim_entrada: interface gráfica para simulação de redes de escoamento bifásico;
- o) mfsim_saida: interface gráfica para resultados de escoamento bifásico;
- p) modelo_Pots: modelo simplificado de Pots para escoamento anular;
- q) modelo_Taitel: modelo simplificado de Taitel para escoamento estratificado;
- r) modelo_anular: função que determina o fechamento do modelo para padrão de escoamento;
- s) modelo_bolhas: função que determina o fechamento do modelo para padrão de escoamento;
- t) modelo_duto: função que gera o vetor de coeficientes da matriz da EDP discretizada;

- u) modelo_duto_BB: função que gera o vetor de coeficientes da matriz da EDP discretizada;
- v) modelo_duto_G: função que gera o vetor de coeficientes da matriz da EDP discretizada;
- w) modelo_duto_L: função que gera o vetor de coeficientes da matriz da EDP discretizada;
- x) modelo_estratificado: função que determina o fechamento do modelo para padrão de escoamento;
- y) modelo_fluido: função que descreve as propriedades dos fluidos;
- z) modelo_intermitente: função que determina o fechamento do modelo para padrão de escoamento;
- aa) modelo_rede: função referente ao modelo de redes de escoamento bifásico;
- bb) modelo_rede_SS: função referente ao modelo de redes de escoamento bifásico simplificado;
- cc) modelo_rede_jacobiana: função que gera Jacobiana do modelo de redes de escoamento bifásico;
- dd) modelo_reservatorio: função que determina as vazões de gás e de líquido do reservatório;
- ee) modelo_valvula: função que determina pressão a montante da válvula;
- ff) modelo_valvulaRet: função que determina as vazões de líquido e de gás para válvulas de retenção;
- gg) modelo_vertice: função que determina o modelo dos vértices dinâmicos;
- hh) montaRegime: função que consolida as variáveis de fechamento;
- ii) plota_resultados: função que plota os resultados da simulação;
- jj) simulador: função que executa a simulação bifásica de escoamento em redes de dutos;

- kk) simulador_SS: função que executa a simulação bifásica estacionária em redes de dutos;
- solver_edp_diferencas: função que transforma sistemas de EDP em EDO segundo diferenças finitas centrais;
- mm) solver_edp_diferencas_upwind: função que transforma sistemas de EDP em EDO segundo diferenças finitas upwind;
- nn) solver_edp_galerkin: função que transforma sistemas de EDP em EDO segundo *Galerkin*;
- oo) solver_edp_petrovgalerkin: função que transforma sistemas de EDP em EDO segundo *Petrov-Galerkin*;
- pp) solver_sea: função que resolve um sistema algébrico não-linear (Newton-Raphson).

A organização do simulador e a relação entre essas funções estão ilustradas no grafo da Figura 9.13.

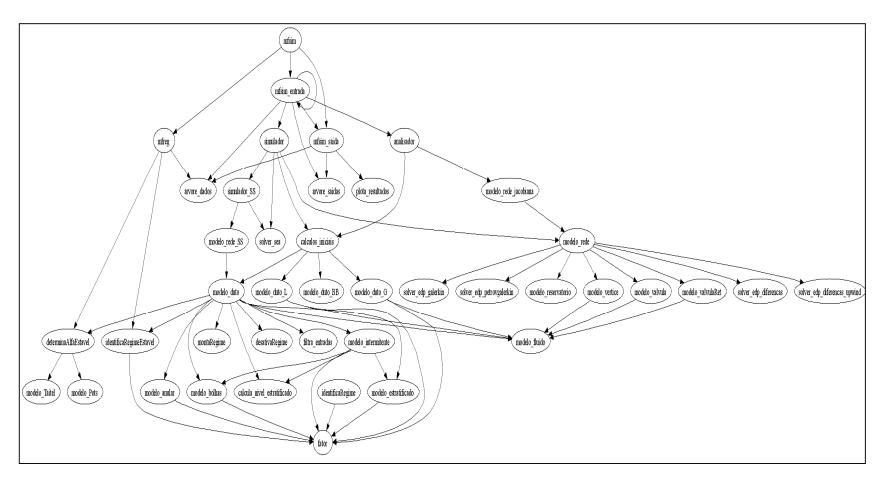


Figura 9.13. Organização do simulador

10 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES DINÂMICAS

Nesse capítulo estão descritos os diversos estudos de casos para os modelos apresentados nos Capítulos 4, 5, 6 e 9, utilizando os métodos numéricos descritos no Capítulo 7, para cenários envolvendo dutos simples (ver Subseção 10.1), redes de dutos (ver Subseção 10.2) e, finalmente, redes complexas típicas de sistemas de produção de petróleo (ver Subseção 10.3).

10.1 DUTO SIMPLES

As simulações apresentadas nessa seção são referentes aos mesmos fluidos considerados para o desenvolvimento dos mapas de padrões de escoamento: massa específica do líquido de 860 kg/m³, viscosidade do líquido de 0.008 Pa.s, massa específica do gás de 90 kg/m³ a 100 bar, viscosidade do gás de 2 10⁻⁵ Pa.s e tensão interfacial de 0.03 Pa.m. A compressibilidade das fases foi modelada utilizando expoentes politrópicos iguais a 1000 e 1.4 para as fases líquida e gás, respectivamente.

As tubulações têm diâmetro igual a 0.1 m e rugosidade de 0.001 m (correspondente a um duto usado em aço carbono), sendo discretizadas através de 50 elementos finitos. Para escoamento de um trecho horizontal adotou-se um comprimento de 1000 m e para a simulação de um trecho vertical adotou-se 100 m.

Foram utilizadas condições de contorno do tipo *Dirichlet* para as vazões de gás e de líquido na entrada do duto e para a pressão no final do tubo. Não foram utilizados vértices dinâmicos.

Os métodos de *Galerkin* e de diferenças finitas centrais foram utilizados para a solução do modelo de escoamento bifásico a 4 equações.

10.1.1 Escoamento horizontal estratificado

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

 No tempo inicial, as vazões mássicas de líquido e de gás na entrada da tubulação são de 0.5 e 0.1 kg/s, respectivamente (números de Froude das fases líquido e gás iguais a 0.077 e 0.048, respectivamente), que corresponde a um padrão de escoamento estratificado, conforme pode ser verificando através do mapa de escoamento:

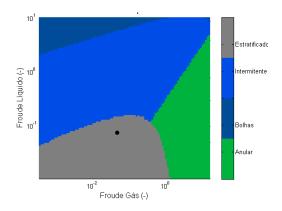


Figura 10.1. Indicação do padrão estratificado para a condição inicial da simulação

- Entre os instantes 150s e 180s, a vazão mássica de gás é elevada de 0.1 para 0.13 kg/s através de uma rampa;
- Após o instante 180s, a vazão mássica de gás é mantida constante.

A condição inicial do duto corresponde ao estado estacionário obtido através da anulação do vetor de derivadas temporais do modelo dinâmico. A Figura 10.2 representa os perfis de pressão e de fração de área de gás correspondentes às condições iniciais da simulação, onde se verifica que a fração de área de gás é praticamente constante ao longo de todo o comprimento do duto, sofrendo apenas um pequeno desvio pela variação da densidade das fases.

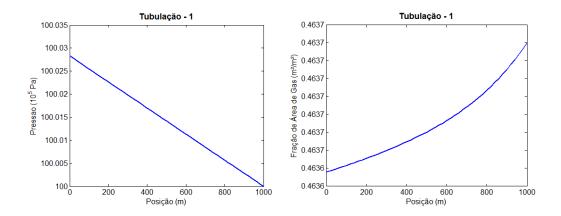


Figura 10.2. Condições iniciais para simulação de escoamento horizontal estratificado

A seguir, a Figura 10.3 descreve o comportamento dinâmico da fração de área de gás, da pressão e das vazões mássicas de gás e de líquido:

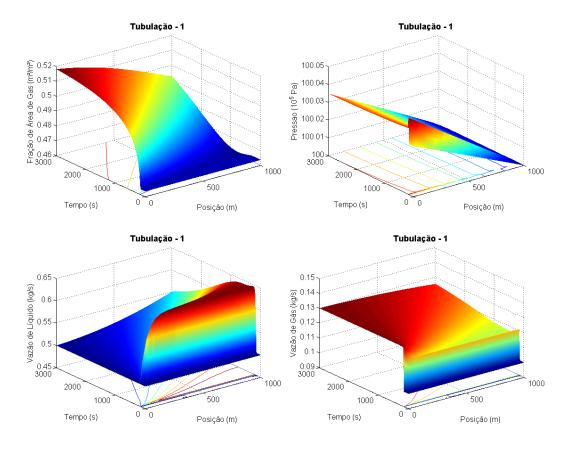


Figura 10.3. Resultados para simulação escoamento horizontal em regime estratificado Analisando-se as figuras anteriores é possível notar que:

- a) Nos 150 s iniciais, as variáveis de estado permaneceram constantes, que indica que a condição inicial da simulação realmente representa um estado estacionário do sistema dinâmico;
- A elevação da vazão mássica de gás dada pela condição de contorno do problema ocasionou uma elevação da vazão mássica de líquido devido à transferência de momento entre as fases. Cabe ressaltar que a condição de contorno para vazão mássica de líquido foi mantida constante ao longo de todo o tempo de simulação;
- c) Para as condições simuladas, ou seja, baixas velocidades das fases, a perda de carga ao longo da tubulação é muito pequena. Porém, é possível confirmar que a elevação dessa perda de carga devido ao aumento da vazão da fase gás;

d) Analisando a dinâmica desse sistema, observa-se que há uma conjugação de diferentes velocidades de propagação. Observa-se que: a pressão possui uma dinâmica extremamente rápida; as vazões das fases gás e líquido apresentam uma dinâmica muito rápida seguida de um comportamento mais lento; e a fração de área apresenta o comportamento mais lento dentre essas variáveis de estado.

O número de elementos finitos utilizados na discretização dos trechos de tubulação afeta significativamente os resultados da simulação dinâmica. A Figura 10.4 compara os comportamentos das variáveis de estado para diferentes números de elementos finitos do método de *Galerkin*.

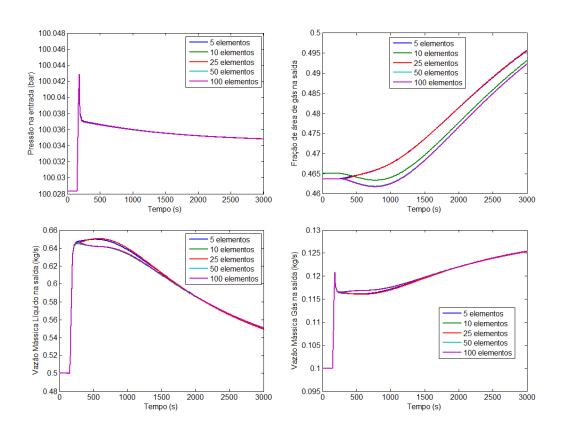


Figura 10.4. Análise de sensibilidade de malha (caso estratificado) via método de Galerkin

A título de comparação, a mesma análise é feita utilizando o método de diferenças finitas centrais, como mostra a Figura 10.5. A comparação entre os métodos numéricos é feita na Figura 10.6.

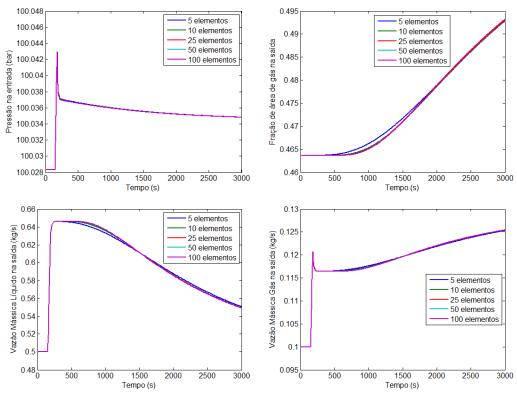


Figura 10.5. Análise de sensibilidade de malha (caso estratificado) via método de diferenças finitas

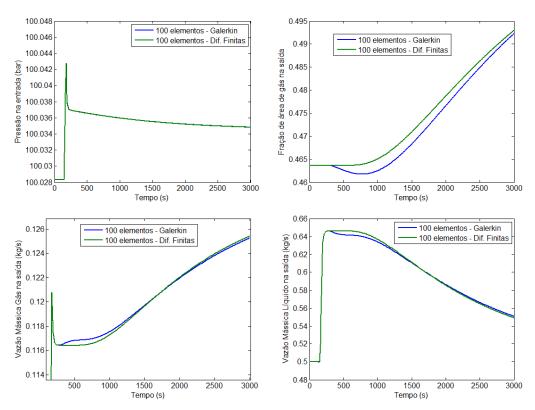


Figura 10.6. Comparação entre métodos de Galerkin e de diferenças finitas

Analisando-se as Figura 10.4 e Figura 10.5, nota-se que ambos os métodos tendem assintoticamente a uma solução quanto maior o número de elementos utilizados.

A Tabela 10.1 apresenta os tempos computacionais necessários para a simulação do caso descrito nessa subseção para os métodos de Galerkin e de Diferenças Finitas em um microcomputador com processador de 1,67 GHz de velocidade e 2 Gb de capacidade de memória RAM.

Método Numérico	Número de Elementos (ou nós)	Tempo Computacional (s)
Galerkin	5	17.28
Galerkin	10	19.47
Galerkin	25	27.00
Galerkin	50	43.98
Galerkin	100	132.41
Dif. Finitas	5	15.65
Dif. Finitas	10	16.49

25

50

100

20.25

30.83

88.52

Dif. Finitas

Dif. Finitas

Dif. Finitas

Tabela 10.1. Comparação entre tempos computacionais

Dessa tabela é possível verificar que o método de Diferenças Finitas requer um menor tempo computacional que o método de Galerkin, fato esse esperado já que o método de Galerkin requer o cálculo do modelo ao longo dos elementos para a determinação dos coeficientes do modelo conforme descrito em detalhes na subseção 7.4 pela determinação de integrais segundo quadraturas gaussianas. Também é possível nota a dependência entre o tempo computacional e o número de elementos ou nós de discretização.

Uma análise relevante para verificação da estabilidade do sistema dinâmico discretizado pode ser obtida através da análise da matriz Jacobiana das derivadas temporais das variáveis de estado reduzidas da rede de escoamento. Essa análise é apresentada para o instante de tempo final (7200 s) considerando duas formulações de condição de contorno: a primeira mostrada na Figura 10.7 utiliza as condições de contorno consideradas nesse exemplo (condição de contorno do tipo *Dirichlet* para as vazões de gás e de líquido na entrada do duto e para a pressão no final do tubo, e condição de contorno do tipo *von Neumann* para fração de área de gás na entrada do tubo) e a segunda, mostrada na Figura 10.8, mantém as

condição de contorno do tipo *Dirichlet* da formulação anterior porém não aplica a condição de contorno do tipo *von Neumann* na fração de gás da entrada.

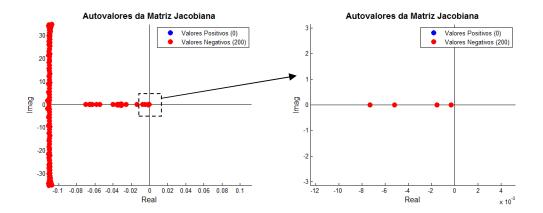


Figura 10.7. Análise para 3 condições de contorno Dirichlet e 1 condição de contorno von Neumann

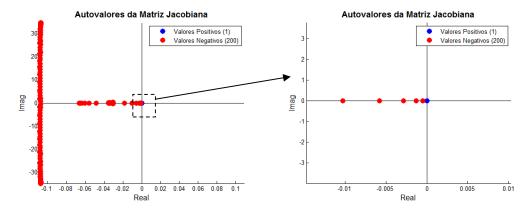


Figura 10.8. Análise para 3 condições de contorno Dirichlet e nenhuma condição de contorno von Neumann

Como resultado dessa análise observa-se que o sistema, na primeira formulação, possui todos os 201 autovalores no semi-plano negativo, o que implica que, nas vizinhanças do vetor de estados analisado, o sistema é estável. Porém, para a segunda formulação, um dos autovalores se instala no semi-plano direito o que indica instabilidade.

Outras simulações foram realizadas considerando diferentes cenários dinâmicos não sendo observadas instabilidades, no entanto observou-se, na formulação em que a fração de área de gás não possui condição de contorno de gradiente nulo na entrada do duto, que a derivada temporal da fração de área de gás é nula para qualquer condição, ou seja, a fração de área de gás permanece constante ao longo de toda a simulação dinâmica, o que explica o autovalor positivo e próximo de zero observado na Figura 10.8. Em suma, observou-se que ao se utilizar condições de contorno *Dirichlet* de vazão de líquido e de gás na entrada do duto e

pressão na saída do duto é necessário forçar uma quarta condição de contorno que corresponde à condição de contorno do tipo *von Neumann* para fração de área de gás na entrada do duto.

10.1.2 Escoamento horizontal anular

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

a) No tempo inicial, as vazões mássicas de líquido e de gás na entrada da tubulação são de 0.5 kg/s e de 5.0 kg/s, respectivamente (Números de Froude das fases líquido e gás iguais a 0.077 e 2.40, respectivamente), que plotado no mapa de escoamento indica padrão anular:

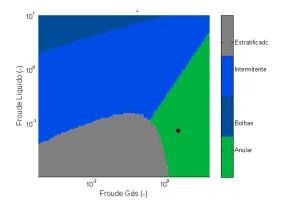


Figura 10.9. Indicação do padrão anular para a condição inicial da simulação

- Entre os instantes 150s e 180s, a vazão mássica de gás é elevada de 5.0 para 5.5 kg/s através de uma rampa;
- c) Após o instante 180s, a vazão mássica de gás é mantida constante.

A condição inicial do duto corresponde ao estado estacionário obtido através da anulação do vetor de derivadas temporais do modelo dinâmico. A Figura 10.10 representa os perfis de pressão e de fração de área de gás correspondentes às condições iniciais da simulação:

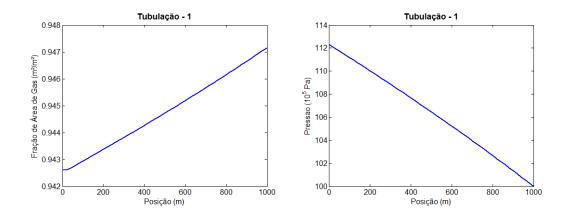


Figura 10.10. Condições iniciais para simulação de escoamento horizontal anular

A Figura 10.11 descreve o comportamento dinâmico da fração de área de gás, da pressão e das vazões mássicas de gás e de líquido:

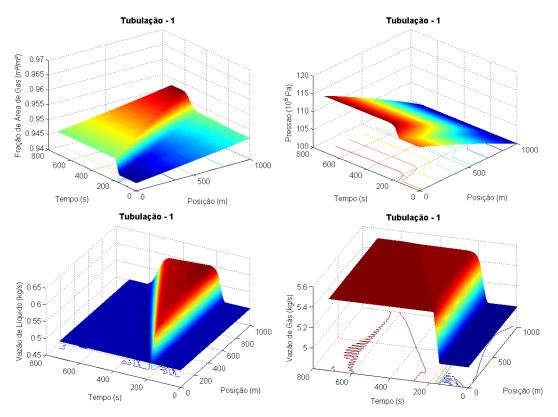


Figura 10.11. Resultados para simulação de escoamento horizontal em regime anular

Analisando-se as figuras anteriores é possível notar que:

 a) A fração de área de gás é próxima de 1, ou seja, praticamente só há gás dentro da tubulação; b) A vazão mássica de líquido sofre uma elevação devido ao arraste promovido pelo gás e em seguida retorna para o valor de contorno após a passagem da onda de fração de área.

Analisando-se os resultados da simulação para diferentes números de elementos finitos, pode-se observar que, no caso proposto de escoamento anular, para simulações com 25 ou mais elementos, todas as variáveis de estado assumem valores muito próximos, tanto via método de *Galerkin* (Figura 10.12) quanto via método de diferenças finitas (Figura 10.13). Diferentemente do caso em escoamento estratificado, as dinâmicas observadas para o escoamento anular (onde as vazões das fases são maiores) são muito mais rápidas, havendo a estabilização da fração de área cerca de 500 s após a perturbação.

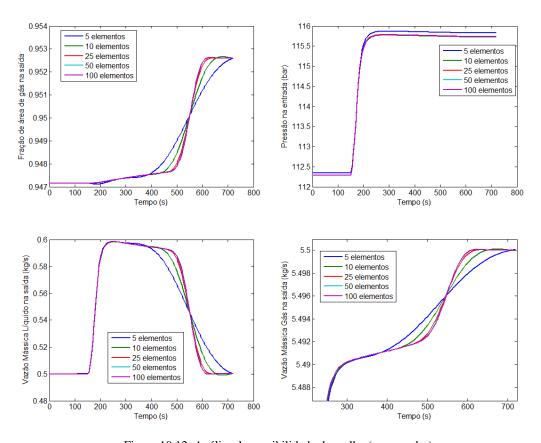


Figura 10.12. Análise de sensibilidade de malha (caso anular)

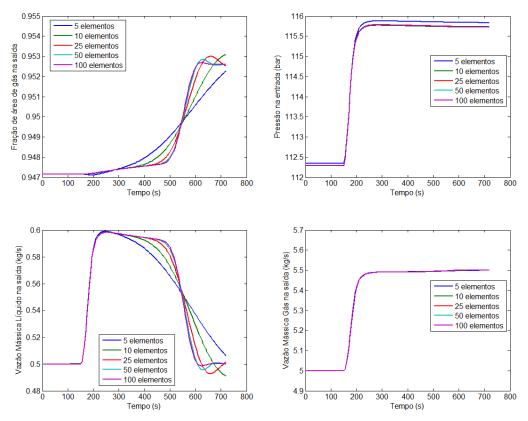


Figura 10.13. Análise de sensibilidade de malha (caso anular)

10.1.3 Escoamento horizontal padrão bolhas

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

a) No tempo inicial, as vazões mássicas de líquido e de gás na entrada da tubulação são de 50 kg/s e de 0,1 kg/s, respectivamente (Números de Froude das fases líquido e gás iguais a 7.75 e 0.048, respectivamente):

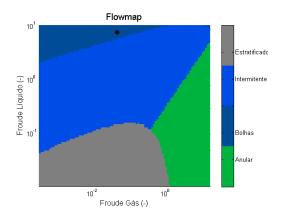


Figura 10.14. Indicação do padrão bolhas para a condição inicial da simulação

- Entre os instantes 150s e 180s, a vazão mássica de líquido é elevada de 50 para 55 kg/s através de uma rampa;
- c) Após o instante 180s, a vazão mássica de líquido é mantida constante.

A condição inicial do duto corresponde ao estado estacionário obtido através da anulação do vetor de derivadas temporais do modelo dinâmico. A Figura 10.15 representa os perfis de pressão e de fração de área de gás correspondentes às condições iniciais da simulação:

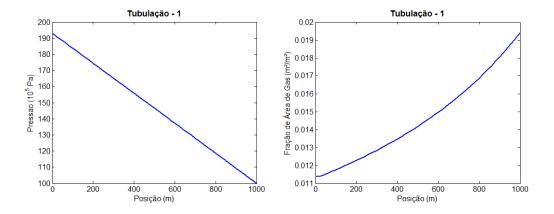


Figura 10.15. Condições iniciais para simulação de escoamento horizontal regime bolhas

A Figura 10.16 descreve o comportamento dinâmico da fração de área de gás, da pressão e das vazões mássicas de gás e de líquido:

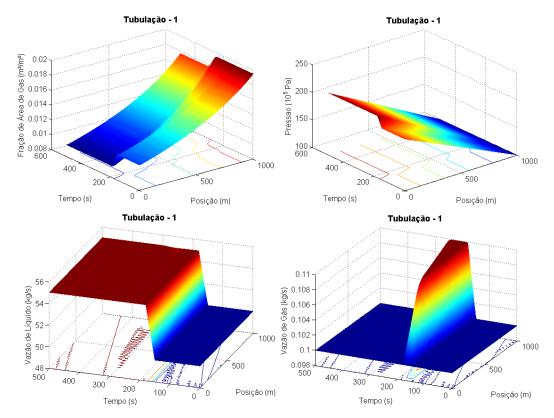


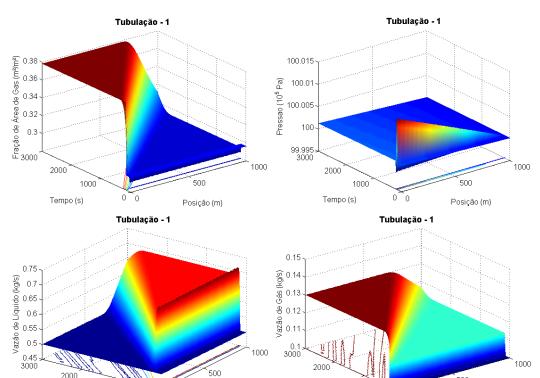
Figura 10.16. Resultados para simulação de escoamento horizontal em regime bolhas

Analisando-se as figuras anteriores é possível notar que:

- a) A fração de área de gás é baixa, ou seja, praticamente só há líquido dentro da tubulação;
- b) De maneira análoga ao caso anterior, verifica-se que a vazão mássica de gás sofre uma elevação devido ao arraste promovido pelo líquido e em seguida retorna para o valor de contorno após a passagem da onda de fração de área.

10.1.4 Escoamento horizontal via modelo a 3 equações

Utilizando-se o modelo de escoamento com 3 equações baseado nas correlações empíricas de Beggs & Brill conforme descrito no Capítulo 6, o mesmo cenário dinâmico adotado para o caso apresentado na Subseção 10.1.1 foi considerado.



A Figura 10.11 descreve o comportamento dinâmico da fração de área de gás, da pressão e das vazões mássicas de gás e de líquido:

Figura 10.17. Resultados para simulação através do modelo a 3 equações

Tempo (s)

Posição (m)

500

Posição (m)

0

10.2 REDES DE DUTOS

Tempo (s)

10.2.1 Dois trechos de dutos em série

Neste item são apresentados os resultados da simulação da rede de escoamento mais simples possível, que corresponde a dois trechos de dutos em série. Foram utilizadas as mesmas especificações adotadas na Subseção 10.1.1 de escoamento horizontal estratificado, onde cada trecho de tubulação possui 500 m e 25 elementos finitos.

Utilizou-se o método de *Galerkin* para a solução do modelo de escoamento bifásico a 4 equações.

Foram adotadas duas formulações:

 a) Formulação A: consiste em simular os dois trechos separadamente e interligar as especificações nodais através de uma especificação especial do tipo conexão (conforme apresentado na Subseção 9.4); b) Formulação B: consiste em simular os dois trechos de dutos acoplados por um vértice dinâmico (vértice do tipo A).

Formulação A

A Figura 10.18 ilustra a rede de escoamento, que é composta por quatro vértices e dois trechos de dutos:

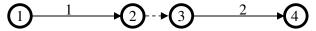


Figura 10.18. Representação de rede simples para formulação A

Todos os quatro vértices são do tipo B, sendo os vértices 1 e 3 dotados de especificações de vazão de líquido e de vazão de gás e os vértices 2 e 4 dotados de especificação de pressão. Ambos os trechos de tubulação têm condição de contorno *Dirichlet* para pressão a jusante, vazão mássica de líquido a montante e vazão mássica de gás a montante.

Formulação B

A Figura 10.19 ilustra a rede de escoamento, que é composta por três vértices e dois trechos de dutos:



Figura 10.19. Representação de rede simples para formulação B

O vértice 1 é um vértice do tipo B com especificações de vazões de líquido e gás. O vértice 2 é um vértice dinâmico (tipo A) com especificações de vazões externas de líquido e de gás nulas. O vértice 3 é um vértice do tipo B com especificação de pressão. O trecho de tubulação 1 tem condição de contorno *Dirichlet* para pressão a jusante, vazão mássica de líquido a montante e vazão mássica de gás a montante. O trecho de tubulação 2 tem condição de contorno *Dirichlet* para fração de área de gás a montante, para pressão a montante e para pressão a jusante.

Resultados

Ambas as formulações geraram resultados similares para as condições simuladas. As Figuras 10.20 a 10.23 resumem os principais resultados.

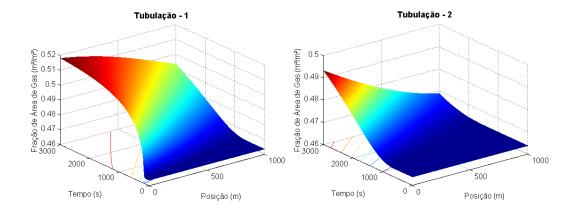


Figura 10.20. Resultados para dois trechos em série: fração de área de gás

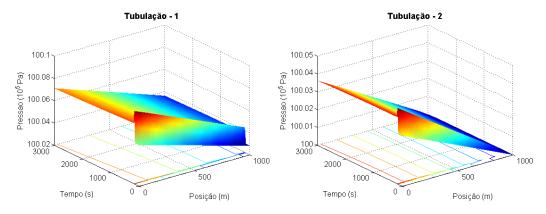


Figura 10.21. Resultados para dois trechos em série: pressão

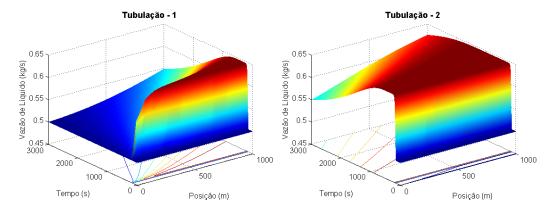


Figura 10.22. Resultados para dois trechos em série: vazão de líquido

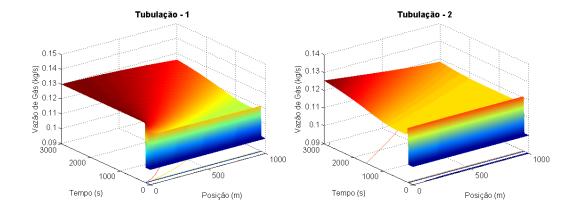


Figura 10.23. Resultados para dois trechos em série: vazão de gás

A Tabela 10.2 apresenta os tempos computacionais necessários para a simulação do caso descrito nessa subseção para os métodos de Galerkin e de Diferenças Finitas em um microcomputador com processador de 1,67 GHz de velocidade e 2 Gb de capacidade de memória RAM.

Método Numérico	Número de Elementos (ou nós)	Número de Elementos (ou nós)	Tempo Computacional (s)	
	Aresta 1	Aresta 2		
Galerkin	5	5	28.08	
Galerkin	25	25	50.28	
Galerkin	50	50	91.90	
Dif. Finitas	5	5	24.82	
Dif. Finitas	25	25	35.01	
Dif. Finitas	50	50	58.69	

Tabela 10.2. Comparação entre tempos computacionais

Dessa tabela é possível verificar que a divisão em dois trechos de tubulação implicou em uma redução computacional se comparado ao obtido na Tabela 10.1 referente ao caso com um único trecho de tubulação mostrado na Subseção 10.1.1.

O fechamento do balanço de massa no acoplamento entre os trechos de tubulação pode ser verificado através da figura a seguir, que mostra a diferença entre as vazões mássicas de entreda e saída do vértice 2 (vértice de conexão) ou através da Tabela 10.3, que descreve as vazões mássicas de líquido e de gás nas extremidades das arestas conectadas ao vértice 2.

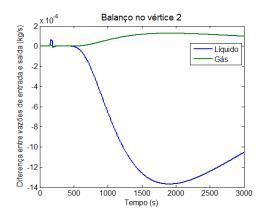


Figura 10.24. Diferença entre vazão de entrada e vazão de saída no vértice de acoplamento

		•	•	
Tempo	Vazão mássica de líquido na saída da aresta 1 (kg/s)	Vazão mássica de líquido na entrada da aresta 2 (kg/s)	Vazão mássica de gás na saída da aresta 1 (kg/s)	Vazão mássica de gás na entrada da aresta 2 (kg/s)
0	0.500	0.500	0.100	0.100
750	0.644	0.644	0.117	0.117
1000	0.637	0.637	0.117	0.117
2000	0.586	0.586	0.122	0.122
3000	0.549	0.549	0.125	0.125

Tabela 10.3. Verificação do fechamento do balanço de massa

Como pode-se notar na Tabela 10.3, há uma igualdade entre os valores de vazão mássica nas extremidades de das arestas conectadas ao vértice 2, tanto para a fase líquida quanto para a fase gás, o que indica o perfeito fechamento do balanço de massa no acoplamento dos trachos de tubulação..

10.2.2 Rede com ciclo

Neste item são apresentados os resultados da simulação de uma rede de escoamento composta por um ciclo e cinco arestas (dutos). Foram utilizadas as mesmas especificações adotadas na Subseção 10.1.1 de escoamento horizontal estratificado, onde cada trecho de tubulação possui 200 m e 10 elementos finitos sendo os trechos 4 e 5 com diâmetro 0,05 m e os demais com diâmetro 0,1 m. A Figura 10.25 ilustra a rede de escoamento, que é composta por cinco vértices e cinco trechos de dutos:

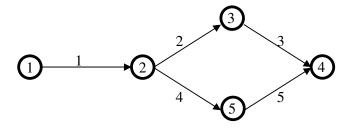
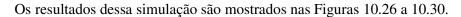


Figura 10.25. Representação de rede com ciclo

Para efetuar o acoplamento entre as arestas utilizam-se vértices dinâmicos. O vértice 1 é um vértice do tipo B (VB) com especificação de vazões externas de líquido e de gás. Os vértices 2, 3 e 5 são vértices dinâmicos (VA) com especificações de vazão de líquido e de gás com vazões externas nulas. O vértice 4 é um vértice do tipo B (VB) com especificação da pressão na saída dos trechos de duto 3 e 5.

O trecho de tubulação 1 tem condição de contorno *Dirichlet* para pressão a jusante, vazão mássica de líquido a montante e vazão mássica de gás a montante. Os trechos de tubulação 2, 3, 4 e 5 têm condição de contorno *Dirichlet* para fração de área de gás e para pressão a montante e para pressão a jusante.

Utilizou-se o método de *Galerkin* para a solução do modelo de escoamento bifásico a 4 equações.



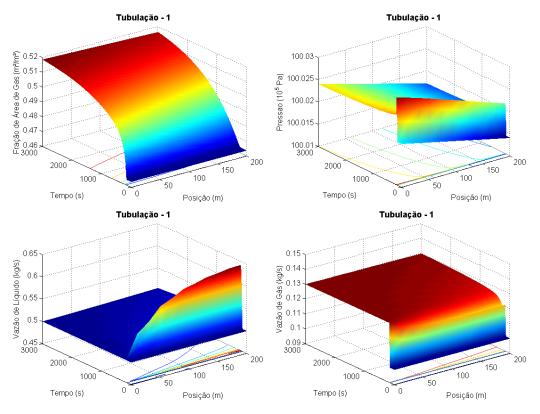


Figura 10.26. Resultados para rede de dutos: tubulação 1

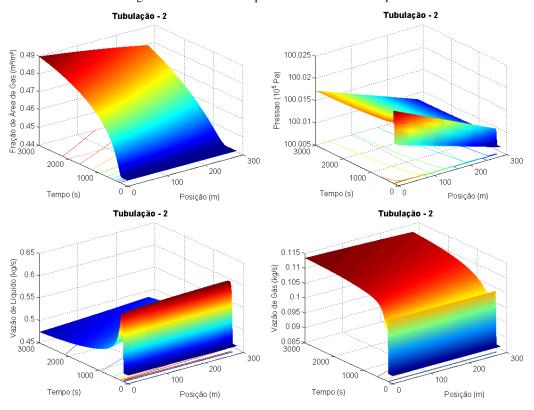


Figura 10.27. Resultados para rede de dutos: tubulação 2

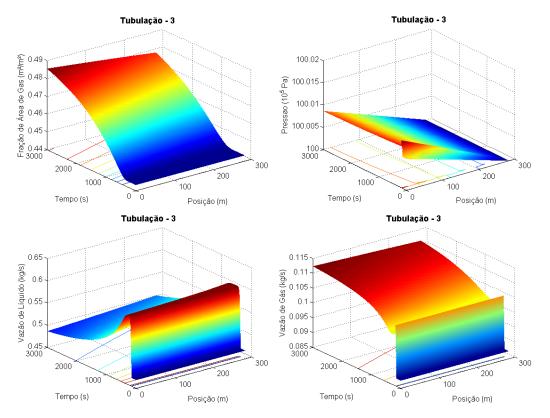


Figura 10.28. Resultados para rede de dutos: tubulação 3

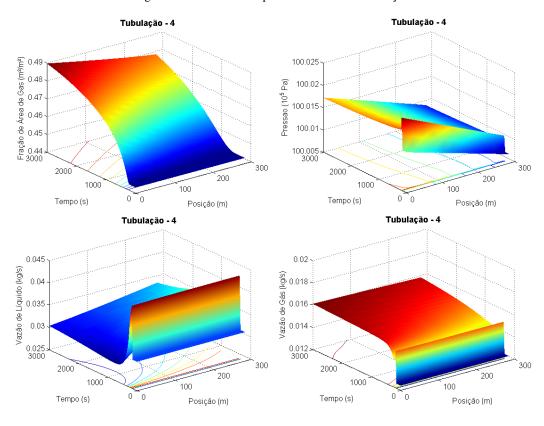


Figura 10.29. Resultados para rede de dutos: tubulação 4

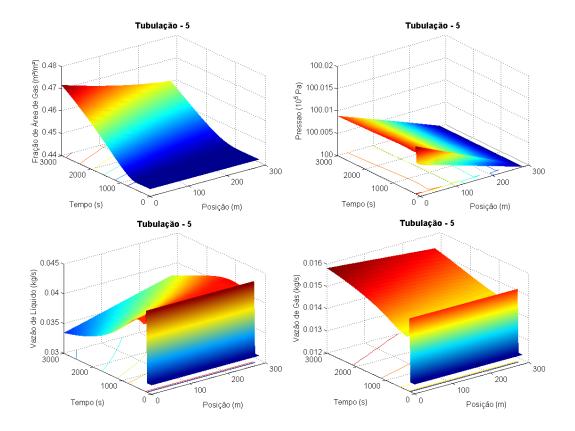


Figura 10.30. Resultados para rede de dutos: tubulação 5

Analisando-se as figuras anteriores, pode-se confirmar o fechamento do balanço de massa. Além disso, é possível observar o impacto da diferença de diâmetro dos dutos que compõem o ciclo sobre a distribuição das vazões das fases.

10.3 ELEVAÇÃO DE PETRÓLEO

Para essas simulações, as propriedades dos fluidos consideradas estão resumidas na Tabela 10.4 e o método de solução do sistema de equações diferenciais parciais adotado foi o de diferenças finitas centrais, escolhido devido ao menor consumo de tempo para a solução numérica mantendo uma precisão adequada.

Fluido	Densidade do Líquido (kg/m³)	Densidade de Ref. do Gás (kg/m³)	Pressão de Referência (bar)	Coeficiente Politrópico (-)	Viscosidade (Pa·s)	Tensão Interfacial (Pa·m)	
Óleo	850.0	-	-	$+\infty$	1.2 10 ⁻²	0.071	
Gás	-	80.0	100	1.25	8.0 10 ⁻⁵	0.071	

Tabela 10.4. Propriedades dos fluidos

10.3.1 Poço simples

Neste item são apresentados os resultados da simulação de um poço de produção de petróleo conforme descrito na Figura 10.31. Esse poço é modelado através de um vértice de entrada (1) com especificação especial do tipo reservatório e um vértice de destino com especificação de pressão (2) além de uma especificação especial do tipo válvula para representar a válvula *choke* da cabeça do poço. O trecho de tubulação é vertical com diâmetro de 5 in e comprimento de 2048 m discretizados através de 25 diferenças finitas, tendo condições de contorno *Dirichlet* para pressão a jusante, vazão mássica de líquido a montante e vazão mássica de gás a montante.

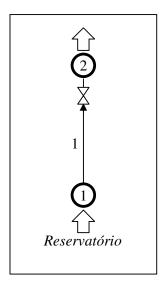


Figura 10.31. Representação do poço simples

Utilizou-se o método de diferenças finitas centrais para a solução do modelo de escoamento bifásico a 3 equações.

O reservatório é modelado considerando a pressão de reservatório igual a 170 bar, índice de produção de líquido de 0.710 kg/s/bar e o índice de produção de gás de 0.042 kg/s/bar. A válvula *choke* é modelada através de um coeficiente de válvula (Cv) igual a 30.

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

- a) No tempo inicial, a válvula *choke* é mantida completamente aberta;
- b) Entre os instantes 60s e 90s, a abertura da válvula é reduzida de 100% para 25% através de uma rampa;

- c) Entre os instantes 90s e 500s, a abertura da válvula é mantida constante e igual a 25%;
- d) Entre os instantes 500s e 530s, a abertura da válvula é elevada de 25% para 100% através de uma rampa; e
- e) Entre os instantes 530s e 1000s, a abertura da válvula é mantida constante e igual a 100%.

Os resultados dessa simulação são mostrados nas Figuras 10.32 a 10.34.

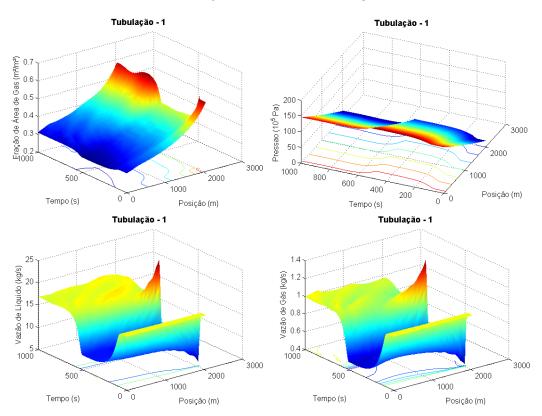


Figura 10.32. Variáveis do trecho de tubulação para simulação do poço simples

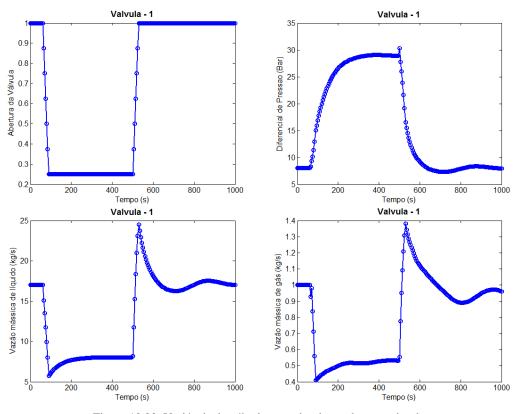


Figura 10.33. Variáveis da válvula para simulação do poço simples

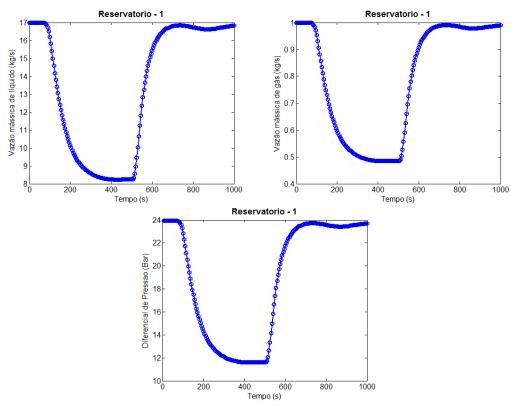


Figura 10.34. Variáveis do reservatório para simulação do poço simples

Esses resultados indicam que a metodologia proposta, seguindo a seleção das condições de contorno conforme descrito nesse caso, é capaz de representar o comportamento de um poço de petróleo típico.

Os seguintes comportamentos típicos desses sistemas podem ser verificados:

- a) O fechamento da válvula *choke* promove um aumento da pressão a montante e, consequentemente, uma redução nas vazões de gás e líquido produzidos;
- A reabertura da válvula faz com que o sistema volte às condições iniciais de pressões e vazões;
- c) Os comportamentos dinâmicos das vazões tanto de líquido quanto de gás são complexos, podendo ser observada a presença de dinâmicas de ordem superior caracterizada pelo *overshooting* das vazões mássicas ao longo do trecho de tubulação.

10.3.2 Poço com gas lift

Neste item são apresentados os resultados da simulação de um poço de produção de petróleo com gas lift conforme descrito na Figura 10.35. O poço é modelado através de dois trechos de tubulação verticais de 5 in (aresta 1 de 338 m de comprimento e aresta 2 de 1710 m de comprimento) interconectados onde: o vértice de entrada (1) tem especificação especial do tipo reservatório, o vértice de destino (2) tem especificação de pressão, o vértice de entrada (3) tem especificações de vazões de líquido e gás e o vértice de destino (4) tem especificação especial do tipo válvula para representar a válvula de *choke* da cabeça do poço. O anular de gás é modelado através da aresta (4) vertical com comprimento 1710 m e diâmetro hidráulico de 5 in onde: o vértice de entrada (7) tem especificações de vazão de líquido e vazão de gás e o vértice de destino (8) é dinâmico e tem volume de 0.1 m³ com especificação especial do tipo válvula de retenção para representar a válvula de gas lift. A aresta de fornecimento de gás é modelada através de um trecho de tubulação horizontal de comprimento 1000 m e diâmetro 2 in (aresta 3) onde: o vértice de entrada (5) tem especificação de pressão e de vazão de líquido nula e o vértice de destino (6) tem especificação especial do tipo válvula para representar a válvula *choke* de gás. As arestas 1, 3 e 4 são discretizadas utilizando 10 diferenças finitas e a aresta 2 discretizada em 25 diferenças finitas.

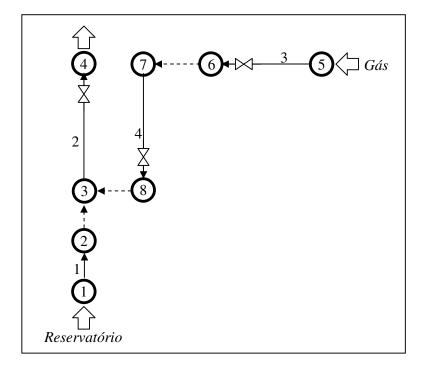


Figura 10.35. Representação do poço com gas lift

Utilizou-se o método de diferenças finitas centrais para a solução do sistema de equações diferenciais parciais devido à complexidade da rede de escoamento simulada já que esse método exige um menor esforço computacional. Além disso, nessa simulação foram utilizados diferentes modelos do escoamento em função das características de cada aresta pertencente à rede de escoamento:

- a) modelo de escoamento bifásico a 3 equações para a aresta 2 com padrão de escoamento intermitente ao longo de toda a simulação;
- b) modelo monofásico de gás para as arestas 3 e 4;
- c) modelo monofásico líquido para a aresta 1.

O reservatório é modelado considerando pressão de reservatório igual a 170 bar, índice de produção de líquido de 0.983 kg/s/bar e índice de produção de gás de 0 kg/s/bar. A válvula *choke* da cabeça do poço (aresta 2) é modelada através de um Cv igual a 30. A válvula *choke* de gás (aresta 3) é modelada através de um Cv igual a 5. A válvula de *gas lift* (aresta 4) é modelada através de uma válvula de retenção com Cv igual a 50.

<u>Cenário 1 – sem intermitência</u>

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

- a) No tempo inicial a válvula *choke* de gás (da aresta 3) é mantida com abertura de 100%;
- b) Entre os instantes 100s e 150s, a abertura da válvula *choke* de gás é reduzida de 100% para 75% através de uma rampa;
- c) Entre os instantes 150s e 5000s, a abertura da válvula é mantida constante e igual a 75%.

Nas figuras a seguir, pode-se verificar o efeito na restrição do fornecimento de gás (caracterizado pelo fechamento da válvula de *choke* de gás) sobre as demais variáveis do sistema. Nota-se a elevação da pressão na base do poço (entrada da tubulação 1) e a consequente diminuição na produção de líquido.

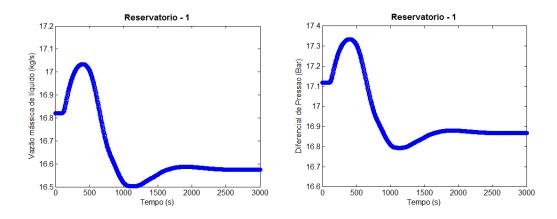


Figura 10.36. Variáveis do reservatório para simulação do poço com gas lift

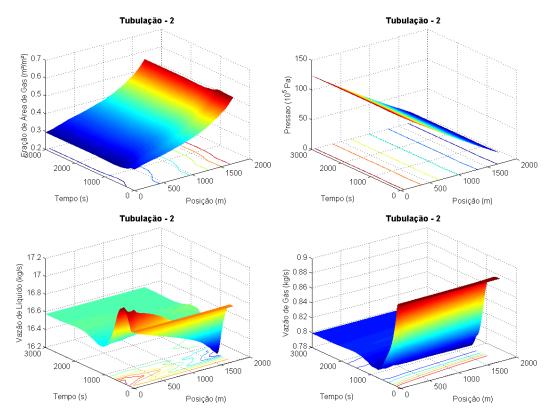


Figura 10.37. Variáveis do poço para simulação do poço com gas lift

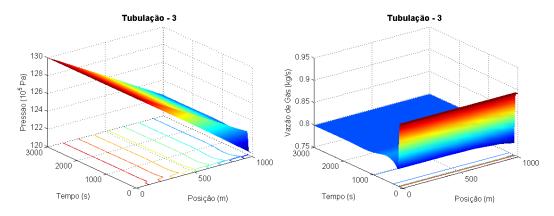


Figura 10.38. Variáveis da aresta de gás a montante da *choke* para simulação do poço com *gas lift*

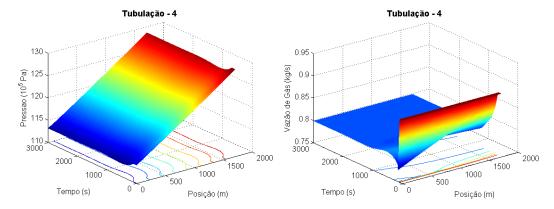


Figura 10.39. Variáveis da aresta de gás a jusante da choke para simulação do poço com gas lift

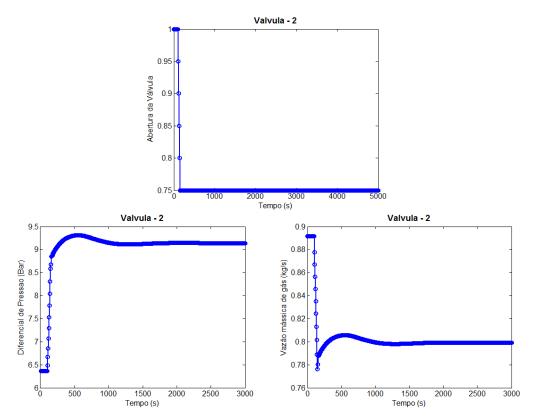


Figura 10.40. Variáveis da choke de gás para simulação do poço com gas lift

Cenário 2 – com intermitência

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

a) No tempo inicial a válvula *choke* é mantida com abertura de 75%;

- b) Entre os instantes 100s e 150s, a abertura da válvula *choke* de gás é reduzida de 75% para 15% através de uma rampa; e
- c) Entre os instantes 150s e 10000s, a abertura da válvula é mantida constante e igual a 15%.

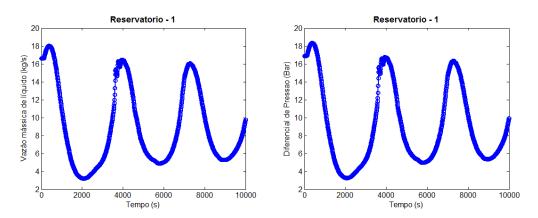


Figura 10.41. Variáveis do reservatório

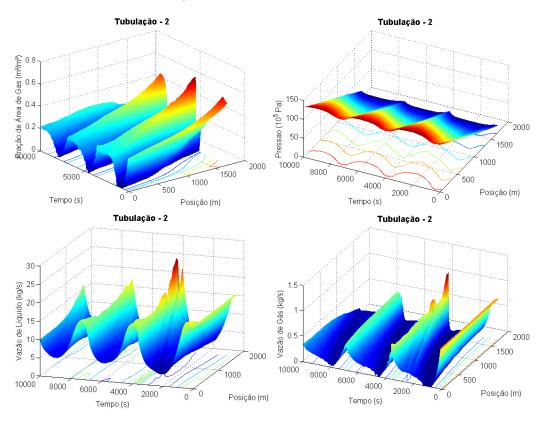


Figura 10.42. Variáveis do poço para simulação do poço com gas lift

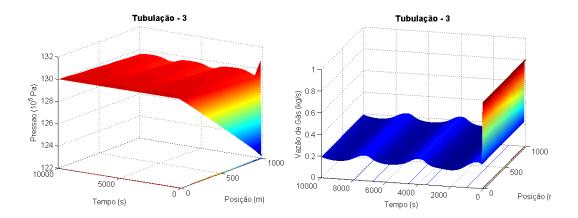


Figura 10.43. Variáveis da aresta de gás a montante da choke para simulação do poço com gas lift

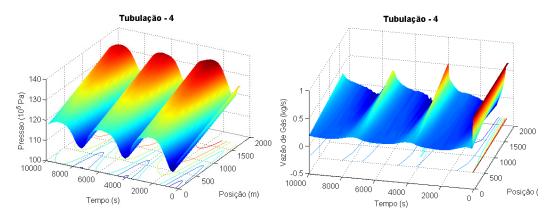


Figura 10.44. Variáveis da aresta de gás a jusante da choke para simulação do poço com gas lift

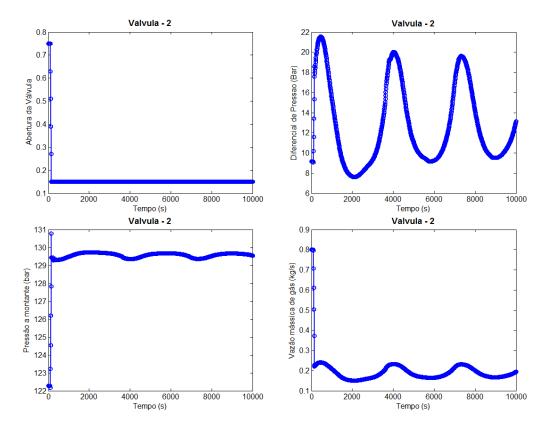


Figura 10.45. Variáveis da válvula choke de gás para simulação do poço com gas lift

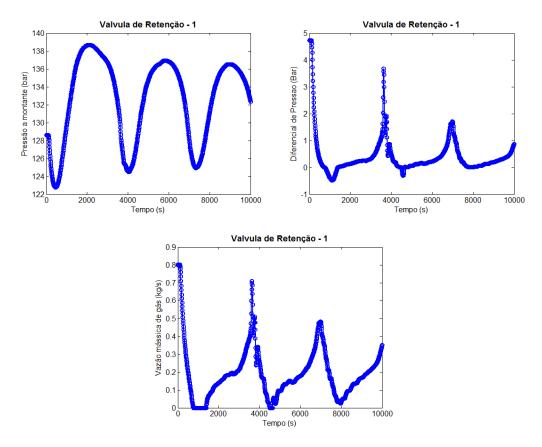


Figura 10.46. Variáveis da válvula de gas lift para simulação do poço com gas lift

Nesse segundo cenário dinâmico, uma redução substancial da abertura da válvula de gás faz com que o poço opere de forma intermitente. Para essa condição, a aresta de gás é incapaz de suprir todo o gás necessário para a garantia de elevação contínua do líquido.

Esses resultados indicam que a metodologia proposta, seguindo a seleção das condições de contorno conforme descrito nesse caso, é capaz de representar o comportamento de um poço de petróleo dotado de *gas lift*.

10.3.3 Poço offshore

Nesta subseção são apresentados os resultados da simulação de um poço *offshore* de produção de petróleo com *gas lift* conforme descrito na Figura 10.47.

O poço é modelado através de dois trechos de tubulação verticais de 5 in (aresta 1 de 300 m de comprimento e aresta 2 de 1500 m de comprimento) interconectados onde: o vértice de entrada (1) tem especificação especial do tipo reservatório, o vértice de destino (2) tem especificação de pressão, o vértice de entrada (3) tem especificações de vazões de líquido e gás e o vértice de destino (4) tem especificação especial do tipo válvula para representar a

válvula de *choke* da cabeça do poço. A linha de produção é modelada através de um trecho de tubulação de 5 in (aresta 3) com uma primeira seção horizontal de 3500 m e uma segunda seção inclinada com deslocamento horizontal de 1000 m e deslocamento vertical de -100 m. O *riser* é modelado através de um trecho de tubulação vertical de 5 in (aresta 4) e comprimento de 1500 m.

O anular de gás é modelado através da aresta 7 vertical descendente com comprimento 1500 m e diâmetro hidráulico de 5 in onde: o vértice de entrada (13) tem especificações de vazão de líquido e vazão de gás e o vértice de destino (14) é dinâmico e tem volume de 0.1 m³ com especificação especial do tipo válvula de retenção para representar a válvula de gas lift. A linha de fornecimento de gás é modelada através de um trecho de tubulação de 2 in (aresta 6) com uma primeira seção vertical descendente de comprimento 1500 m, uma segunda seção inclinada com deslocamento horizontal de 1000 m e deslocamento vertical de 100 m e uma terceira seção horizontal de 3500 m onde: o vértice de entrada (11) tem especificação de pressão e de vazão de líquido nula e o vértice de destino (12) tem especificação especial do tipo válvula para representar a válvula choke de gás. A linha de entrega de gás (a montante da válvula choke de gás é modelada através da aresta 5 horizontal com comprimento de 100 m e diâmetro hidráulico de 5 in onde: o vértice de entrada (9) tem especificações de vazão de líquido e vazão de gás e o vértice de saída (10) tem especificação especial do tipo válvula para representar a válvula de choke de gás.

As arestas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são discretizadas com 10, 20, 20, 20, 5, 15 e 10 diferenças finitas, respectivamente. Os trechos de escoamento bifásico e de escoamento de líquido têm rugosidade de duto igual a 100 µm e os trechos de escoamento de gás têm rugosidade nula (tubo liso).

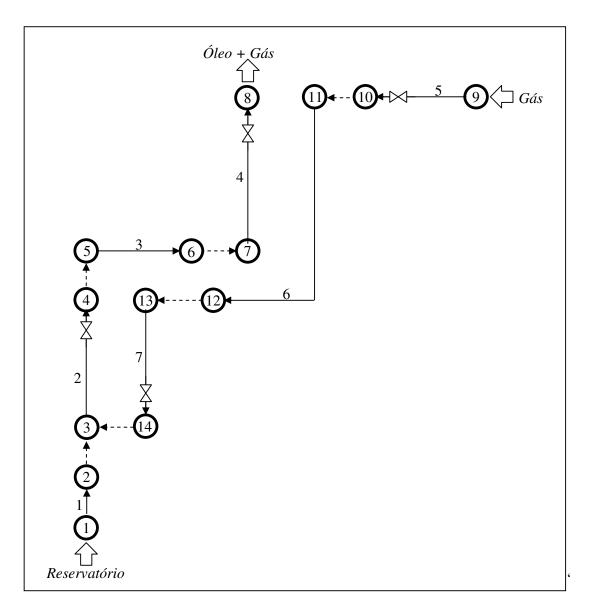


Figura 10.47. Representação do sistema de produção offshore

Utilizou-se o método de diferenças finitas centrais. Além disso, nessa simulação foram utilizados diferentes modelos em função das características de cada aresta pertencente à rede de escoamento:

- a) modelo de escoamento bifásico a 3 equações para as arestas 2, 3 e 4 com padrão de escoamento intermitente ao longo de toda a simulação;
- b) modelo monofásico de gás para as arestas 5, 6 e 7;
- c) modelo monofásico líquido para a aresta 1.

O seguinte cenário dinâmico foi considerado:

- a) No tempo inicial, a válvula *choke* de gás é mantida com abertura de 100%;
- b) Entre os instantes 100s e 150s, a abertura da válvula *choke* de gás é reduzida de 100% para 75% através de uma rampa;
- c) Entre os instantes 150s e 5000s, a abertura da válvula é mantida constante e igual a 75%.

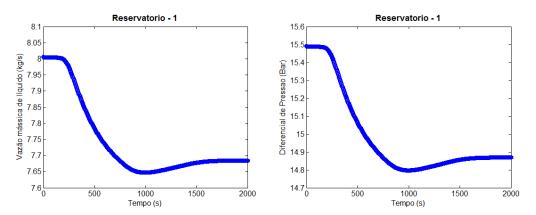


Figura 10.48. Variáveis do reservatório para simulação do poço offshore

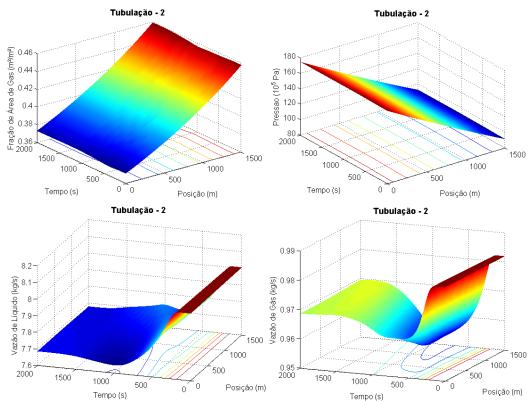


Figura 10.49. Variáveis do poço para simulação do poço offshore

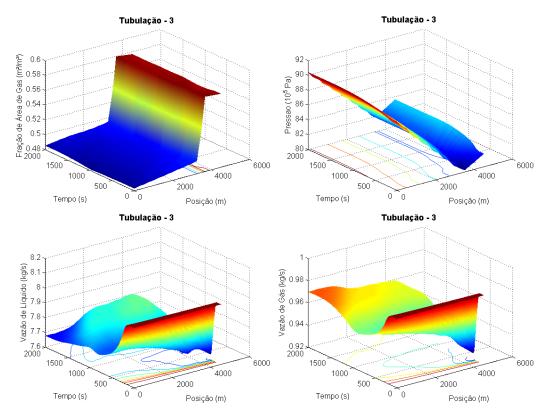


Figura 10.50. Variáveis da linha de produção para simulação do poço offshore

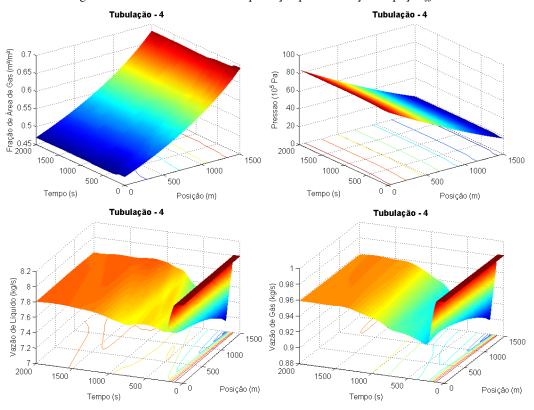


Figura 10.51. Variáveis do riser de óleo para simulação do poço offshore

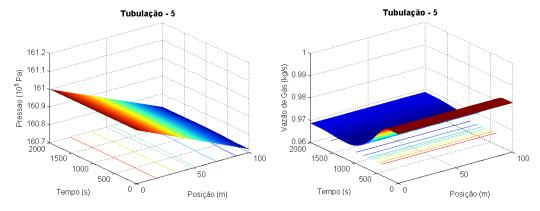


Figura 10.52. Variáveis da linha de gás a montante da choke para simulação do poço offshore

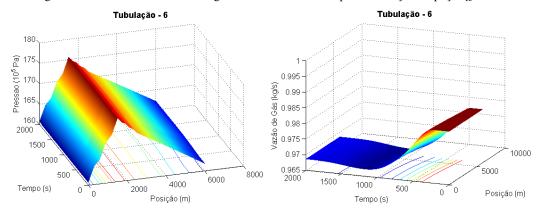


Figura 10.53. Variáveis da linha de gás a jusante da choke para simulação do poço offshore

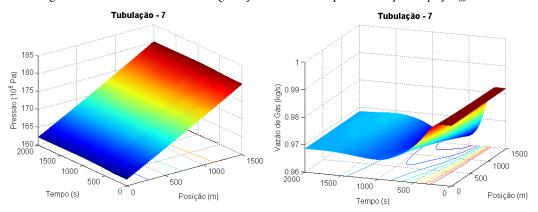


Figura 10.54. Variáveis do anular de gás para simulação do poço offshore

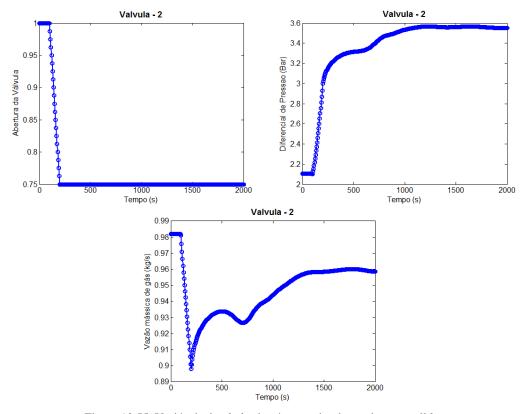


Figura 10.55. Variáveis do choke de gás para simulação do poço offshore

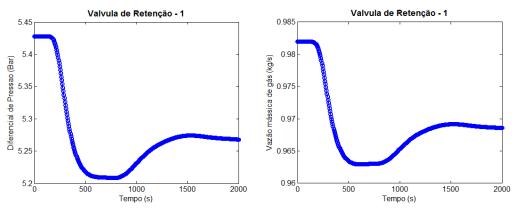


Figura 10.56. Variáveis da válvula de gás lift para simulação do poço offshore

As figuras anteriores mostram o comportamento do poço acoplado à linha de produção e ao *riser*, além dos efeitos da linha de transferência de gás de injeção. Para essa geometria não foi observado o fenômeno de intermitência conforme apresentado na geometria da subseção anterior.

11 MODELAGEM ESTACIONÁRIA SIMPLIFICADA DE REDES DE ESCOAMENTO BIFÁSICO

11.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo é apresentado um modelo capaz de descrever o comportamento estacionário de uma rede de escoamento com qualquer topologia baseado em um conjunto de equações algébricas não-lineares.

É importante destacar que, conforme apresentado na Equação (9.29), é possível obter um modelo estacionário a partir do modelo dinâmico anulando-se dos termos de derivadas temporais e resolvendo-se o sistema algébrico resultante. No entanto, o elevado número de equações e a forma desse sistema dificultam a sua utilização em redes de escoamento complexas ou mesmo o acoplamento desse modelo estacionário à rotinas de otimização.

Desse modo, esse capítulo tem como enfoque o desenvolvimento de um modelo que possibilite a determinação do comportamento estacionário do escoamento bifásico a partir de um sistema algébrico formulado a partir de equações em parâmetros concentrados. Sendo a determinação de variáveis como densidade da mistura, *hold-up* de líquido e tensão de cisalhamento feita através de correlações empíricas.

Esse modelo pode ser utilizado como estimativa inicial para os modelos dinâmicos apresentados nos capítulos anteriores, porém seu uso é mais indicado na solução de problemas que envolvem redes de escoamento complexas, com ciclos e diversos pontos de consumo e/ou geração.

Além disso, por se tratar de um modelo que requer um baixo esforço computacional para sua solução, pode ser utilizado junto a algoritmos de otimização com o intuito de desenvolver projetos ótimos de redes de escoamento. Resultados da aplicação desse modelo são descrios no Capítulo 12 onde são apresentados projetos ótimos de redes de escoamento bifásico, mais especificamente para sistema de elevação artificial de petróleo.

11.2 DEFINIÇÕES

As notações adotadas para a descrição da rede de escoamento são as mesmas apontadas no Capítulo 9. O modelo bifásico simplificado da rede de escoamento pode ser

representado pelo seguinte conjunto de **4N+6S** variáveis (onde N corresponde ao número de vértices e S ao número de arestas da rede de dutos):

a) Variáveis de vértice

- Vetor de vazões mássicas externas de líquido \underline{W}_L (dimensão \mathbf{N} x $\mathbf{1}$, onde $W_{L,i}$ é a vazão mássica externa de líquido no i-ésimo vértice, em kg/s).
- O Vetor de vazões mássicas externas de gás \underline{W}_G (dimensão \mathbf{N} x $\mathbf{1}$, onde $W_{G,i}$ é a vazão mássica externa de gás no i-ésimo vértice, em kg/s).
- O Vetor de pressões de vértices \underline{P}_T (dimensão $\mathbf{N} \times \mathbf{1}$, onde $P_{T,i}$ é a pressão de estagnação no i-ésimo vértice, adimensional).
- Vetor de *hold-up*'s de líquido \underline{H}_L (dimensão $\mathbf{N} \times \mathbf{1}$, onde $H_{L,i}$ é o *hold-up* de líquido no *i*-ésimo vértice).

b) Variáveis de arestas

- O Vetor de vazões mássicas internas de líquido \underline{q}_L (dimensão $\mathbf{S} \times \mathbf{1}$, onde $q_{L,j}$ é a vazão mássica interna de líquido na j-ésima aresta, em kg/s).
- O Vetor de vazões mássicas internas de gás q_G (dimensão $\mathbf{S} \times \mathbf{1}$, onde $q_{G,j}$ é a vazão mássica interna de gás na j-ésima arestas, em kg/s).
- Vetor de pressões na entrada das arestas $\underline{P}_{T,IN}$ (dimensão $\mathbf{S} \times \mathbf{1}$, onde $P_{T,IN,j}$ é a pressão na extremidade de entrada da j-ésima arestas, adimensional).
- Vetor de pressões na saída das arestas $\underline{P}_{T,OUT}$ (dimensão $\mathbf{S} \times \mathbf{1}$, onde $P_{T,OUT,j}$ é a pressão na extremidade de saída da *j*-ésima arestas, adimensional).
- Vetor de *hold-up*'s de líquido na entrada das arestas $\underline{H}_{L,IN}$ (dimensão $\mathbf{S} \times \mathbf{1}$, onde $H_{L,IN,j}$ é o *hold-up* de líquido na entrada da *j*-ésima aresta).
- Vetor de *hold-up*'s de líquido na saída das arestas $\underline{H}_{L,OUT}$ (dimensão **S** x **1**, onde $H_{L,OUT,j}$ é o *hold-up* de líquido na saída da *j*-ésima aresta).

Para as variáveis de vazão mássica interna, um valor positivo indica que a direção de escoamento é a mesma adotada como orientação para o digrafo e um valor negativo indica

que o escoamento tem direção oposta à orientação do digrafo. Para as variáveis de vazão mássica externa, um valor positivo indica que fluido está entrando na rede e um valor negativo indica que fluido está deixando a rede.

As variáveis de pressão (P_T , $P_{T,IN}$ e $P_{T,OUT}$) são adimensionalizadas através de uma pressão de referência P_R em Pascal.

Podem ser consideradas quatro aplicações para os vértices: consumidores (valores negativos de vazão mássica externa), fornecedores (valores positivos de vazão mássica externa), conectores (valores nulos para vazão mássica externa) e pressão fixa (valor fixo para a pressão do vértice).

11.3 NOTAÇÃO MATRICIAL

Uma importante ferramenta para a organização matemática do modelo é a notação matricial baseada nas matrizes de incidência \underline{MI} , \underline{MI}_{IN} e \underline{MI}_{OUT} com N linhas e S colunas, com as seguintes regras de formação:

- <u>MI</u> possui o elemento da i-ésima linha com j-ésima coluna igual a +1 se a j-ésima aresta está conectada ao i-ésimo vértice e o vértice está no final da aresta;
- <u>MI</u> possui o elemento da *i*-ésima linha com *j*-ésima coluna igual a -1 se a *j*-ésima aresta está conectada ao *i*-ésimo vértice e o vértice está no início da aresta;
- <u>MI</u> possui o elemento da *i*-ésima linha com *j*-ésima coluna igual a 0 se a *j*-ésima aresta não está conectada ao *i*-ésimo vértice;
- <u>MI</u>_{IN} possui elementos iguais a +1 nas posições onde os elementos de <u>MI</u> são iguais a +1 e 0 para as outras posições;
- <u>MI</u>_{OUT} possui elementos iguais a +1 nas posições onde os elementos de <u>MI</u> são iguais a
 -1 e 0 para as outras posições.

Para organizar as variáveis da rede, um vetor coluna \underline{y} é formado através da concatenação de todos os vetores de variáveis conforme (11.1):

$$\underline{y} = \left[\underline{q_L}^T \quad \underline{q_G}^T \quad \underline{P_{T,IN}}^T \quad \underline{P_{T,OUT}}^T \quad \underline{H_{L,IN}}^T \quad \underline{H_{L,OUT}}^T \quad \underline{P_T}^T \quad \underline{H_L}^T \quad \underline{W_L}^T \quad \underline{W_G}^T \right]^T$$
(11.1)

Com o intuito de representar de maneira simplificada o fenômeno de escoamento bifásico sem a necessidade de resolver balanços de energia, algumas premissas são adotadas: (i) fase líquida é incompressível e (ii) fase gás com densidade descrita por uma relação politrópica. Para escoamento isotérmico, o coeficiente politrópico do gás adotado deverá ser igual a 1. Para escoamentos não-isotérmicos, o coeficiente politrópico do gás deve ser estimado para cada caso.

Os parâmetros dos modelos são: aceleração gravitacional g em m/s², densidade do líquido ρ_L em kg/m³, densidade do gás na pressão de referência ρ_{G0} em kg/m³, coeficiente politrópico do gás γ_G , pressão de referência para os fluidos P_0 em Pa, pressão de referência P_R em Pa, viscosidade do líquido e do gás, μ_L e μ_G , em Pa·s, tensão interfacial σ em Pa·m, matriz de incidência \underline{M} , matriz de especificação \underline{E} , vetor de especificações \underline{e} , vetor de elevações nodais \underline{z} em m, vetor de inclinações das arestas $\underline{\theta}$ em rad, vetor de diâmetros das arestas \underline{D} em m, vetor de comprimentos das arestas \underline{L} em m, vetor de comprimentos equivalentes das arestas \underline{L}_{eq} em m e vetor de rugosidades das arestas $\underline{\varepsilon}$ em m, onde $\underline{\theta}$, \underline{D} e $\underline{\varepsilon}$ são funções da posição axial ao longo da aresta.

A complexidade do escoamento bifásico implica em um modelo não-linear (ver Subseção 11.4) que é resolvido por um método iterativo a partir de uma estimativa inicial obtida através de um modelo linear simplificado (ver Subseção 11.5).

11.4 MODELO NÃO-LINEAR

As equações do modelo estão divididas em seis classes:

Balanços de massa nos vértices (2N equações)

$$\underline{\underline{MI}}\underline{q_L} + \underline{W_L} = \underline{0} \tag{11.2}$$

$$\underline{\underline{MI}}q_{\underline{G}} + \underline{W}_{\underline{G}} = \underline{0} \tag{11.3}$$

 Balanços de momento nas arestas, resultantes da integração do gradiente de pressão (ver Subseção 11.6) ao longo do comprimento das arestas (S equações):

$$\underline{P_{T,OUT}} - \underline{P_{T,IN}} - 0.5 \left(\underline{\Delta P_1} + \underline{\Delta P_2}\right) = \underline{0}$$
(11.4)

com:

$$\Delta P_{1,i} = P_R^{-1} \int_0^{L_i} \frac{dP_i}{dx} dx$$
 (11.5)

$$\Delta P_{2,i} = P_R^{-1} \int_{L_i}^{0} \frac{dP_i}{dx} dx$$
 (11.6)

Foi verificado um aumento significativo no desempenho dos métodos numéricos empregados quando o gradiente de pressão ao longo da aresta é obtido como uma média entre o gradiente de pressão integrado ao longo das duas direções como representado em (11.4). Essa abordagem garante que os balanços de momento nas arestas possuam uma sensibilidade similar tanto para a pressão na saída da aresta como a pressão na entrada da aresta. A determinação de $\Delta P_{1,i}$ de acordo com (11.5) requer a integração do gradiente de pressão desde a entrada até a saída considerando como valor inicial a pressão igual a $P_{T,IN,i}$. A determinação de $\Delta P_{2,i}$ de acordo com (11.6) requer a integração do gradiente de pressão desde a entrada até a saída considerando como valor inicial a pressão igual a $P_{T,IOUTi}$.

■ Balanço de momento nos vértices (2S equações):

$$\underline{\underline{MI}}_{IN}^{T} \underline{P_{T}} - \left(\underline{P_{T,IN}} + \underline{h_{L,IN}} \times \underline{q_{L}} + \underline{h_{G,IN}} \times \underline{q_{G}}\right) = \underline{0}$$
(11.7)

$$\underline{\underline{MI}}_{OUT}^{T} \underline{P_{T}} - \left(P_{T,OUT} + \underline{h}_{L,OUT} \times \underline{q_{L}} + \underline{h}_{G,OUT} \times \underline{q_{G}} \right) = \underline{0}$$
(11.8)

onde os vetores $\underline{h}_{L,IN}$ e $\underline{h}_{G,IN}$ estão relacionados à energia cinética do líquido e do gás na entrada das arestas e os $\underline{h}_{L,OUT}$ e $\underline{h}_{G,OUT}$ estão relacionados à energia cinética do líquido e do gás na saída das arestas, sendo calculados conforme (11.9):

$$\underline{\underline{h}}_{i,j} = 10^{-5} \operatorname{diag}^{-1} \left(2\underline{\rho}_{i,j} \times \underline{\rho}_{i,j} \times \underline{A}_{j} \right) |\underline{\underline{v}}_{i,j}|$$

$$\underset{j \in \{IN,OUT\}}{\underbrace{h}_{i,j}} = 10^{-5} \operatorname{diag}^{-1} \left(2\underline{\rho}_{i,j} \times \underline{\rho}_{i,j} \times \underline{A}_{j} \right) |\underline{\underline{v}}_{i,j}|$$
(11.9)

Os vetores \underline{A}_{OUT} e \underline{A}_{IN} correspondem às áreas das seções transversais nas extremidades finais e iniciais das arestas, $\underline{v}_{L,OUT}$ e $\underline{v}_{G,OUT}$ correspondem às velocidades de líquido e de gás nas extremidades finais das arestas e $\underline{v}_{L,IN}$ e $\underline{v}_{G,IN}$ correspondem às velocidades de líquido e de gás nas extremidades iniciais das arestas.

■ Determinação de *hold-up* nas extremidades, (2S equações):

$$\underline{H_{L,IN}} - \underline{H_L}(\underline{0})\Big|_{\text{Correlação}} = \underline{0}$$
 (11.10)

$$\underline{H_{L,OUT}} - \underline{H_L} \left(\underline{L} \right) \Big|_{\text{Correlação}} = \underline{0}$$
(11.11)

■ Modelo nodal para *hold-up* (**S** equações):

$$\underline{\underline{R}}^{T} \underline{H_{L}} - \underline{\underline{R}}_{IN} \underline{H_{L,IN}} - \underline{\underline{R}}_{OUT} \underline{H_{L,OUT}} = \underline{0}$$
(11.12)

onde \underline{R} é uma matriz que identifica quais arestas retiram líquido de cada vértice (levando em consideração a direção de escoamento da fase líquida, \underline{R}_{IN} é uma matriz diagonal que identifica quais arestas possuem vazões positivas de líquido e \underline{R}_{OUT} é uma matriz diagonal que identifica quais arestas possuem vazões negativas de líquido, descritas, respectivamente, em (11.13), (11.14) e (11.15).

$$\underline{R} = \left(\frac{abs(\underline{MI}) - \underline{MI}diag(sign(\underline{q_L}))}{2}\right)$$
(11.13)

$$\underline{\underline{R}}_{IN} = diag \left(\frac{sign(abs(\underline{q}_L)) + sign(\underline{q}_L)}{2} \right)$$
 (11.14)

$$\underline{\underline{R}}_{OUT} = diag \left(\frac{sign(abs(\underline{q}_L)) - sign(\underline{q}_L)}{2} \right)$$
 (11.15)

Especificações (2N equações)

$$\underline{\underline{E}}\underline{y} - \underline{e} = \underline{0} \tag{11.16}$$

O modelo não-linear da rede de escoamento bifásico estacionário requer 2N especificações. Com o objetivo de garantir a viabilidade da solução para o proposto modelo, apenas variáveis nodais serão especificadas e pelo menos uma especificação de pressão deve ser definida.

As especificações do modelo são representadas de acordo com o vetor de especificações \underline{e} contendo os valores das variáveis especificadas e com a matriz de especificações \underline{E} , onde o elemento da i-ésima aresta e da j-ésima coluna é igual a um se a j-ésima variável estiver especificada na i-ésima equação, do contrário é igual a zero.

É importante reforçar que esse modelo pode ser aplicado na simulação de redes bifásicas cíclicas e não-cíclicas com qualquer topologia inclusive em redes dotadas de vértices divergentes (onde duas ou mais arestas deixam o mesmo vértice), não sendo encontrado na literatura modelo bifásico de redes de escoamento que possua característica similar.

11.5 MODELO LINEAR

O objetivo desse modelo é gerar uma estimativa inicial para o método iterativo. Esse modelo considera que: (i) uma fase escoa sem a interferência da outra fase, (ii) fases são incompressíveis, (iii) escoamento laminar das fases líquida e gás, (iv) *hold-up* constante ao longo de cada aresta e (v) *hold-up's* em cada vértice são conhecidos e especificados. Com essas simplificações, é possível calcular o gradiente de pressão da mistura como sendo uma combinação linear de cada fase, gerando um sistema linear de equações.

Através das estimativas para o vetor de *hold-up* nos vértices $\underline{H}_{L,0}$, é possível determinar as frações de áreas nas arestas \underline{H}_0 , através de (11.17) com a matriz \underline{R}_0 definida em (11.18).

$$\underline{H}_0 = \underline{\underline{R}}_0^T \underline{\underline{H}}_{L,0} \tag{11.17}$$

$$\underline{\underline{R}}_{0} = 0.5 \left(abs \left(\underline{\underline{MI}} \right) - \underline{\underline{MI}} \right) \tag{11.18}$$

As equações do modelo estão divididas em quatro classes:

Balanços de massa nodais (2N equações)

$$\underline{\underline{MI}}q_{\underline{L}} + \underline{W}_{\underline{L}} = \underline{0} \tag{11.19}$$

$$\underline{\underline{MI}}\underline{q_G} + \underline{W_G} = \underline{0} \tag{11.20}$$

Balanços de momento nas arestas considerando regime laminar (S equações):

$$P_{T,IN} - P_{T,OUT} - \underline{\underline{F}}_{L} \underline{q}_{L} - \underline{\underline{F}}_{G} \underline{q}_{G} - \underline{d} = \underline{0}$$

$$(11.21)$$

onde as matrizes de coeficientes para determinação da perda de carga \underline{F}_L e \underline{F}_G para regime laminar são dadas em (11.22) e (11.23) e o vetor de termos fonte gravitacionais, \underline{d} , é dado em (11.24).

$$\underline{\underline{F}}_{L} = \frac{1.28 \cdot 10^{-3} \,\mu_{L}}{\pi \rho_{I}} diag\left(\underline{H}_{L,0}\right) diag\left(\underline{L}\right) diag^{-1}\left(\underline{D}\right) \tag{11.22}$$

$$\underline{\underline{F}}_{G} = \frac{1.28 \cdot 10^{-3} \,\mu_{G}}{\pi \rho_{G}} \, diag \left(\underline{1} - \underline{H}_{L,0}\right) diag \left(\underline{L}\right) diag^{-1} \left(\underline{D}\right) \tag{11.23}$$

$$\underline{d} = 10^{-5} g \left(\rho_L \operatorname{diag} \left(\underline{H}_o \right) + \operatorname{diag} \left(\rho_G \right) \operatorname{diag} \left(\underline{1} - \underline{H}_{L,o} \right) \right) \underline{\underline{MI}}^T \underline{z}$$
(11.24)

 Balanço de momento nos vértices (2S equações), desconsiderando os termos de velocidade em (11.7) e (11.8):

$$\underline{\underline{MI}}_{IN}^{T} \underline{P_T} - \underline{P_{T,IN}} = \underline{0} \tag{11.25}$$

$$\underline{\underline{MI}}_{OUT}^{T} \underline{P}_{\underline{T}} - P_{T,OUT} = \underline{0}$$
 (11.26)

■ Igualdade entre os *hold-up's* nas extremidades (**S** equações):

$$H_{L,IN} - H_{L,OUT} = \underline{0} \tag{11.27}$$

Modelo nodal para hold-up (S equações):

$$\underline{\underline{R}}_0^T \underline{H}_L - H_{L,IN} = \underline{0} \tag{11.28}$$

Especificações (N+S equações)

$$\underline{\underline{E_0}}\underline{y} - \underline{e_0} = \underline{0} \tag{11.29}$$

Especificações de hold-up's nodais(N equações)

$$\underline{H_L} - \underline{H}_{L,0} = \underline{0} \tag{11.30}$$

O modelo simplificado pode ser expresso usando uma notação matricial conforme apresentado em (11.31):

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{c} \tag{11.31}$$

A matriz de coeficientes \underline{A} tem dimensão ($\mathbf{4N+6S}$) \mathbf{x} ($\mathbf{4N+6S}$) e é composta pela matriz de incidência \underline{MI} , pela matriz de especificações \underline{E}_0 , pela matriz identidade \underline{I}_{NN} com dimensão \mathbf{N} \mathbf{x} \mathbf{N} , pela matriz identidade \underline{I}_{SS} com dimensão \mathbf{S} \mathbf{x} \mathbf{S} , pela matriz de zeros $\underline{\mathcal{Q}}_{NN}$ com dimensão \mathbf{N} \mathbf{x} \mathbf{N} , pela matriz de zeros $\underline{\mathcal{Q}}_{SS}$ com dimensão \mathbf{S} \mathbf{x} \mathbf{S} , pela matriz de zeros $\underline{\mathcal{Q}}_{NS}$ com dimensão \mathbf{N} \mathbf{x} \mathbf{S} e pela matriz de zeros $\underline{\mathcal{Q}}_{SN}$ com dimensão \mathbf{S} \mathbf{x} \mathbf{N} , conforme mostrado em (11.32):

$$\underline{A} = \begin{bmatrix}
\underline{MI} & 0_{0} & 0_{0} & 0_{0} & 0_{0} & 0_{0} & 0_{0} & 0_{0} & I_{NN} & 0_{NN} \\
0_{NS} & \underline{MI} & 0_{NS} & 0_{NS} & 0_{NS} & 0_{NS} & 0_{NN} & 0_{NN} & 0_{NN} & I_{NN} \\
-\underline{F}_{L} & -\underline{F}_{G} & I_{SS} & -I_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & -I_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} \\
0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SS} & 0_{SN} & 0$$

O vetor \underline{c} possui dimensão (4N+6S) x 1 contendo vetores de zeros $\underline{0}_N$ com dimensão N x 1, vetores de zeros $\underline{0}_S$ com dimensão S x 1, a parte o vetor \underline{d} com dimensão S x 1, o vetor de especificação \underline{e}_0 com dimensão (N+S) x 1 e o vetor de especificações de *hold-up*'s nodais $\underline{H}_{W,0}$ conforme mostrado em (11.33):

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{0}_{N}^{T} & \underline{0}_{N}^{T} & \underline{d}^{T} & \underline{0}_{S}^{T} & \underline{0}_{S}^{T} & \underline{0}_{S}^{T} & \underline{H}_{L,0}^{T} & \underline{e}_{0}^{T} \end{bmatrix}^{T}$$

$$(11.33)$$

Cabe ressaltar que o modelo linear requer **2N+S** especificações enquanto o modelo não-linear requer apenas **2N** equações. A escolha das especificações fisicamente viáveis para o modelo linear deve ser feita de modo a: (i) ter todos os *hold-up*'s nodais especificados, (ii) ter pelo menos uma especificação de pressão nodal, e (iii) ter as vazões internas de uma das fases amarradas em cada vértice divergente (que possui mais de uma aresta saindo do vértice).

11.6 DETERMINAÇÃO DO GRADIENTE DE PRESSÃO

Para a determinação do gradiente de pressão em (11.5) e (11.6), é feita uma série de simplificações sobre modelo estacionário bifásico a 3 equações descrito no Capítulo 6.

Após a anulação das derivadas temporais do sistema de equações apresentado em (6.4), o seguinte sistema é obtido:

$$\begin{cases} \frac{\partial q_L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_G}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 + \operatorname{sign}(v_M) \frac{\partial (\rho_M v_M^2)}{\partial P}\right) \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\operatorname{sign}(v_M) \frac{\partial (\rho_M v_M^2)}{\partial q_L}\right) \frac{\partial q_L}{\partial x} + \\ + \left(\operatorname{sign}(v_M) \frac{\partial (\rho_M v_M^2)}{\partial q_G}\right) \frac{\partial q_G}{\partial x} + \frac{\Gamma_M}{A} + \rho_M g \operatorname{sen}(\theta) = 0 \end{cases}$$
(11.34)

Isso implica no gradiente nulo para a vazão mássica ao longo do trecho de tubulação, como previsto pela equação da continuidade. Desse modo, o sistema de três equações diferenciais parciais se reduz a uma única equação diferencial ordinária ao longo de cada trecho de tubulação conforme mostrado em (11.35):

$$\left(A + \operatorname{sign}(v_{M}) \frac{\partial (q_{M} v_{M})}{\partial P}\right) \frac{\partial P}{\partial x} + \Gamma_{M} + \rho_{M} A g \operatorname{sen}(\theta) = 0$$
(11.35)

onde v_M corresponde à velocidade da mistura em m/s, q_M é a vazão mássica da mistura em kg/s, ρ_M é a densidade da mistura em kg/m³, A é a área da seção transversal do tubo em m², θ é o ângulo de inclinação em rad, P é a pressão no tubo em Pa e g é a aceleração gravitacional em m/s².

O termo difusivo Γ_M é modelado através da seguinte equação:

$$\Gamma_{M} = \pi D \left(1 + \frac{L_{eq}}{L} \right) \tau_{M} \tag{11.36}$$

onde D é o diâmetro da tubulação em m, L é o comprimento do tubo em m, L_{eq} é o comprimento equivalente de acidentes e acessórios de tubulação em m e τ_M é a tensão de cisalhamento em Pa.

Definindo-se D_P como a derivada do momento da mistura em relação à pressão conforme:

$$D_{P} = \frac{\partial \left(q_{M} v_{M}\right)}{\partial P} \tag{11.37}$$

Isolando-se o gradiente de pressão de (11.35) e substituindo-se os termos definidos nas relações anteriores, a equação diferencial da pressão fica:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-\pi D \left(1 + \frac{L_{eq}}{L} \right) \tau_{M} - \rho_{M} A g \operatorname{sen}(\theta)}{\left(A + \operatorname{sign}(v_{M}) D_{P} \right)}$$
(11.38)

Nesse trabalho utiliza-se o modelo de Beggs e Brill (1973) para determinação de τ_M , ρ_M e D_P , apresentado no Apêndice VII – Modelo Beggs e Brill (1973), onde o termo D_P é obtido via derivada numérica.

Os métodos numéricos necessários para a solução do modelo proposto devem atender às seguintes tarefas:

- a) solução do sistema de equações algébricas lineares;
- solução do sistema de equações diferenciais ordinárias: utilizou-se um método do tipo Runge-Kutta de ordem 3 a 4;
- c) solução do sistema de equações algébricas não-lineares: programou-se uma rotina baseada no método de Newton-Raphson com Jacobiana numérica, onde o critério de convergência adotado considerava a norma do vetor de resíduo menor que 10⁻¹⁰.

12 OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE GAS LIFT CONTÍNUO

12.1 INTRODUÇÃO

Na produção de petróleo em águas profundas, em que a pressão do reservatório não é suficiente para garantir a elevação até a superfície com um retorno econômico viável, a necessidade de tecnologias de elevação artificial é mandatória. Uma técnica muito empregada e eficiente é o gas lift, onde a injeção de gás em uma determinada posição do poço reduz a densidade média da coluna de líquido e a diferença de pressão hidrostática. Duas metodologias são normalmente aplicadas: gas lift contínuo e gas lift intermitente. Como o enfoque desse trabalho é escoamento em regime estacionário, apenas o gas lift continuo será considerado.

A quantidade de gás injetado é uma variável operacional crítica, pois um baixo valor pode reduzir significantemente a produção de óleo e um valor alto pode elevar os custos operacionais de compressão. Em muitos casos, é possível verificar que a produção de óleo atinge um valor máximo para uma determinada vazão de gás injetado.

Muitos autores exploraram esse problema de otimização determinando as condições ótimas para a extração da máxima quantidade de óleo considerando ou não restrições na disponibilidade de gás e usando diferentes formulações: programação linear (Fang e Lo, 1996), programação linear inteira mista (Kosmidis et al., 2005), programação não-linear (Alarcon et al., 2002), programação dinâmica (Camponogara e Nakashima, 2006) e algoritmos genéticos (Ray e Sarker, 2007).

Como descrito por Dutta-Roy e Kattapuram (1997), o problema de otimização de *gas lift* deve considerar os efeitos de interação entre poços quando estes compartilham a mesma linha de produção. Essa é uma séria limitação da maioria dos *softwares* comerciais de simulação de reservatórios onde a otimização do *gas lift* é realizada separadamente em cada poço. A exceção dos trabalhos de Dutta-Roy e Kattapuram (1997), Kosmidis et al. (2005) e Barragán-Hernandez et al. (2005), a literatura de otimização de *gas lift* é restrita a avaliação de cada poço isoladamente utilizando modelos hidrodinâmicos simplificados. Em outras palavras, os efeitos de rede normalmente encontrados em sistemas submarinos complexos, onde dois ou mais poços dividem a mesma linha de produção, não são levados em consideração.

Nesse capítulo é proposto um problema de otimização acoplado ao modelo de redes de escoamento bifásico apto para simulação de qualquer topologia de rede, apresentado na Subseção 11, para determinar a alocação ótima de gás e projeto ótimo de sistemas de *gas lift* considerando como restrição o índice de produção e a disponibilidade de gás e tendo três tipos de função objetivo: (i) maximização do óleo produzido, (ii) maximização do lucro (diferença de receita com produção de óleo e custos com gás combustível) e (iii) otimização de projeto de sistema de injeção de gás.

12.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Conforme descrito anteriormente, é proposto nessa tese um arcabouço de otimização para determinar as condições operacionais ótimas e/ou o projeto ótimo do sistema de *gas lift* para produção de petróleo. Essa otimização pode ser descrita em (12.1):

Maximizar
$$\Omega_{j}$$

sujeito a:
$$\begin{cases} \underline{LB} < \underline{u} < \underline{UB} \\ (\underline{P}_{well} - \underline{P}_{downhole}) = diag^{-1} (\underline{IP}_{L}) \underline{Q}_{L} \\ \underline{Q}_{G}^{T} \underline{1} < q_{G,mac} \end{cases}$$
(12.1)

onde Ω_j é a função objetivo do tipo j, \underline{LB} é o vetor de limites inferiores, \underline{UB} é o vetor de limites superiores, \underline{P}_{well} é o vetor de pressões do reservatório em bar, $\underline{P}_{downhole}$ é o vetor de pressões na base do poço (wellhole) em bar, \underline{IP}_L é o vetor de índices de produção de líquido em (kg/s)/bar, $q_{G,max}$ é o valor máximo de vazão mássica de gás em kg/s disponível para injeção em todos os poços, \underline{u} é o vetor das m variáveis de decisão composto por três tipos de variáveis:

- Vazão mássica de gás injetado denotada pelo vetor Q_G (onde Q_{Gi} corresponde à vazão mássica de gás em kg/s injetada no i-ésimo poço).
- Vazão mássica de óleo produzido denotada pelo vetor Q_L (onde Q_{Li} corresponde à vazão mássica de óleo em kg/s produzida no i-ésimo poço).
- Diâmetros das arestas de gás denotadas pelo vetor <u>D</u>_G (onde D_{Gi} corresponde ao diâmetro em polegadas das arestas que transportam gás da plataforma até o anular do *i*-ésimo poço)

A função objetivo Ω_j pode ser formada por três termos em milhões de dólares por ano correspondentes à receita (R, nesse caso relativo à produção de petróleo), custo anualizado de utilidades (A_{GC} , nesse caso apenas gás combustível é considerado) e custo total de capital anualizado (A_{TCC}).

Então, três diferentes tipos de função objetivo podem ser obtidos:

 Produção máxima (função objetivo Ω_I): determinação da condição operacional ótima que garantem a máxima produção de óleo para um determinado valor de índice de produção considerando limitações na disponibilidade de gás.

$$\Omega_1 = R \tag{12.2}$$

 Lucro máximo (função objetivo Ω₂): determinação da vazão de gás injetado que garante lucro máximo considerando o custo do gás combustível e o preço de óleo para um determinado valor de índice de produção.

$$\Omega_2 = R - A_{GC} \tag{12.3}$$

 Projeto ótimo (função objetivo Ω₃): determinação da vazão de gás injetado e dos diâmetros de tubulação de gás que garantem um projeto ótimo do sistema de gas lift contínuo, considerando o investimento com compressor, linhas de gás, custos de instalação e manutenção, custos com gás combustível e preço do petróleo.

$$\Omega_3 = R - A_{GC} - A_{TCC} \tag{12.4}$$

O custo *ISBL* (Inside Battery Limits) determinado pelos custos instalados com compressor, turbina a gás e linhas de gás, é calculado de acordo com (12.5).

$$ISBL = C_C + C_T + C_P \tag{12.5}$$

onde C_C é o custo instalado de compressor, C_T é o custo instalado da turbina e C_P é o custo instalado das linhas de gás (em milhões de dólares).

O custo total anualizado de capital pode ser calculado via (12.6):

$$A_{TCC} = CCF \ OSBL \tag{12.6}$$

onde *CCF* pode ser estimado como sendo 0.333 ano⁻¹ (Douglas, 1988) considerando uma taxa de mínima atratividade de 15% e uma amortização de 12 anos.

O custo *OSBL* (*outside battery limits*) pode ser estimado para processos químicos conforme descrito por Douglas (1988) como sendo aproximadamente igual a três vezes o *ISBL*.

12.3 ESTIMATIVA DE INVESTIMENTO COM O COMPRESSOR

Considerando um compressor centrífugo, o custo apresentado por Couper et al. (2005) pode ser descrito conforme (12.7):

$$C_C = 14.3 \cdot 10^{-3} w_C^{0.62} \tag{12.7}$$

onde w_C é a potência da máquina em kW.

O trabalho de compressão é calculado considerando gás ideal em uma máquina composta por n estágios de compressão usando (12.8) descrita em Perry et al. (1999):

$$w_{C} = \frac{n\gamma RT_{IN}}{\eta(\gamma - 1)MW} \left(\left(\frac{\max\left(\underline{P_{G}}\right)}{P_{IN}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{n\gamma}} - 1 \right) \left(\underline{Q_{G}}^{T}\underline{1}\right)$$
(12.8)

onde T_{IN} é a temperatura do gás na sucção do compressor em K, P_{IN} é a pressão do gás na sucção do compressor em bar, \underline{P}_G é o vetor de pressões nas entradas das linhas de gás em bar, \underline{Q}_G é o vetor de gás injetado em kg/s, MW é o peso molecular do gás em kg/kmol, n é o número de estágios de compressão, η é a eficiência de compressão, R é a constante universal dos gases (8.314 kJ/kmol/K) e γ é o coeficiente politrópico do gás.

12.4 ESTIMATIVA DO INVESTIMENTO COM A TURBINA

Considerando o acionamento através de uma turbina a gás, o custo pode ser estimado de acordo com Couper et al. (2005) conforme descrito em (12.9):

$$C_T = 7.19 \cdot 10^{-4} w_C^{0.81} \tag{12.9}$$

onde w_C é a potência da máquina em kW.

12.5 ESTIMATIVA DO CUSTO DE CAPITAL DAS LINHAS DE GÁS

O custo capital relacionado à aquisição e à instalação das linhas de gás para o transporte do gás injetado desde a descarga do compressor até o poço pode ser estimado em (12.10) conforme apresentado por McCoy (2008) para a região sudeste dos EUA.

$$C_{P} = \sum_{i} \left(1.29 \cdot 10^{-3} D_{G,i}^{-1.59} \left(\frac{L_{G,i}}{1000} \right)^{0.901} + \right) + 24.5 \cdot 10^{-3} D_{G,i}^{-0.940} \left(\frac{L_{G,i}}{1000} \right)^{0.820} + \right)$$

$$\left(12.10 \right)$$

onde C_P é o custo instalado em milhões de dólares, $L_{G,i}$ é o comprimento das linhas de gás desde a plataforma até o *i*-ésimo poço em m e $D_{G,i}$ é o diâmetro das linhas de gás do *i*-ésimo poço em polegadas.

12.6 RECEITA E CUSTOS OPERACIONAIS

O custo variável com gás combustível, considerando uma eficiência global (turbina a gás e compressor), pode ser determinado como:

$$A_{GC} = 8.45 \cdot 10^{-3} w_C c_{GC} \tag{12.11}$$

onde A_{GC} é o custo com combustível em milhões de dólares por ano, w_C é a potência do compressor em kW e c_{GC} é o custo do gás em dólares/Nm³.

A receita gerada pela produção de petróleo é determinada por (12.12):

$$R = 198.34 \frac{(\underline{Q_L}^T \underline{1})}{\rho_{L0}} c_L$$
 (12.12)

onde R é o valor de receita em milhões de dólares por ano, ρ_{L0} é a densidade de óleo nas condições padrão em kg/m³, e c_L é o preço do óleo em dólares/barril.

O método de otimização empregado é baseado no algoritmo de programação quadrática seqüencial (SQP). Restrições nas variáveis de decisão são impostas de modo a evitar especificações inviáveis: (i) diâmetro mínimo de 1 polegada, (ii) diâmetro máximo de 4

polegadas, (iii) vazão mínima de injeção de gás de 0 kg/s e (iv) vazão mínima de produção de óleo de 0 kg/s.

13 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE GAS LIFT CONTÍNUO

Quatro estudos de casos são apresentados:

- a) o primeiro caso simula um poço simples (sem linha de produção);
- b) o segundo caso analisa um poço de produção offshore com sistema de gas lift,
 como resultado é possível determinar o comportamento da produção de petróleo
 em função da vazão de gás injetado para diferentes pressões na base do poço;
- c) o terceiro exemplo analisa o comportamento de um sistema de produção offshore dotado de múltiplos poços formando uma rede com topologia do tipo árvore;
- d) o quarto caso simula o comportamento de uma rede submarina complexa dotada de ciclos.

Para essas simulações, as propriedades dos fluidos considerados nessas simulações estão resumidas na Tabela 10.4.

13.1 CASO 1 - POÇO ONSHORE

Considerando um poço que opera através de elevação artificial por *gas lift* contínuo, a vazão de óleo depende das propriedades dos fluidos, da geometria da rede de escoamento, da pressão do reservatório, e da pressão na cabeça do poço. A representação esquemática da geometria do poço e o digrafo da rede estão apresentados na Figura 13.1. Os parâmetros geométricos estão descritos na Tabela 13.1.

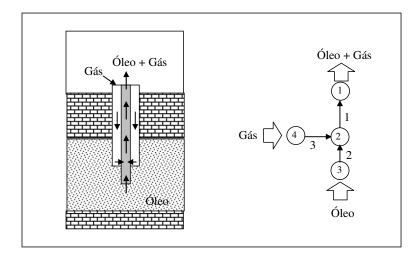


Figura 13.1. Caso 1 - Representação esquemática

Tabela 13.1. Caso 1 - Descrição das arestas

Aresta	Тіро	Diâmetro Interno (in)	Comprimento (m)	Rugosidade (µm)	Inclinação (°)
1	Poço (parte 2)	5	1710	100	90
2	Poço (parte 1)	5	338	100	90
3	Aresta Anular de Gás	5 ^a	1710	100	-90

^a Diâmetro hidráulico.

O modelo possui as seguintes especificações: (i) pressão na cabeça do poço (P_{Tl}) igual a 13.7 bar, (ii) vazão mássica de gás injetado (W_{G4}) , (iii) vazão mássica de óleo produzido (W_{L3}) , (iv) vazão mássica de gás associado (W_{G3}) é nula, (v) vazão mássica de líquido no ponto de injeção de gás (W_{L4}) é nulo, (vi) vazões mássicas externas no vértice 2 $(W_{L2} \text{ e } W_{G2})$ são nulas.

13.1.1 Simulação

Variando-se a vazão mássica de gás injetado e a vazão mássica de óleo produzido é possível mapear superfícies para as demais variáveis da rede de escoamento. São obtidas informações importantes quanto ao comportamento do poço através das curvas de nível da pressão de *downhole* (base do poço), conforme mostrado na Figura 13.2. Considerando um valor fixo para pressão de *downhole* igual a 140 bar, para produzir 17.0 kg/s de óleo é necessário injetar 1.01 kg/s ou um valor superior de gás igual a 3.43 kg/s. Outra variável de interesse é a máxima produção de óleo, para uma dada pressão de *downhole* de 140 bar verifica-se que a máxima produção é de 18.9 kg/s com uma injeção de gás de 1.9 kg/s.

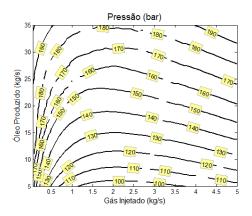


Figura 13.2. Caso 1 - Curvas de nível da pressão no downhole

13.2 CASO 2 - POÇO OFFSHORE

Nesta subseção, o modelo apresentado será aplicado na avaliação do comportamento de uma rede submarina para produção de petróleo composta por um poço conectado a uma aresta de produção com geometria descrita na Figura 13.3. A topologia dessa rede é composta por 9 vértices e 8 arestas de acordo com o digrafo apresentado na Figura 13.4, onde o quarto vértice corresponde ao poço. O poço é representado no digrafo como um quadrado e contém 6 vértices e 5 arestas, conforme mostrado na Figura 13.5.

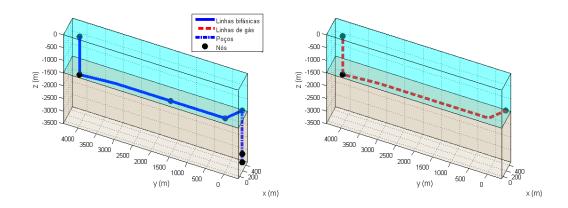


Figura 13.3. Caso 2 - Projeção isométrica simplificada

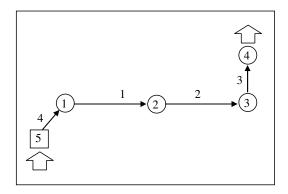


Figura 13.4. Caso 2 - Digrafo da rede

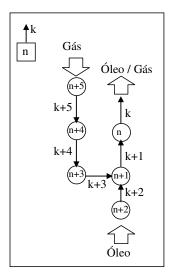


Figura 13.5. Digrafo do poço

As arestas da rede de escoamento são linha de produção (1 e 2), *riser* (3), do poço a linha de produção (4) e as seguintes arestas (onde n é igual a 5): poço (n e n+1), anular de gás (n+2) e linhas de fornecimento de gás (n+3 e n+4). Os parâmetros usados para descrever essas arestas são mostrados nas Tabelas 13.2 a 13.4.

Aresta	Tipo	Diâmetro (in)	Comprimento (m)	Inclinação (°)	Rugosidade (µm)
1	Linha de Produção	6	1500	0°	100
2	Linha de Produção	6	4005	Ver Tabela 13.3	100
3	Riser	6	1500	90°	100
4	Poço à linha de produção	5	500	0°	100
5	Poço	5	1500	90°	100
6	Poço	5	300	90°	100
7	Anular de gás	5 ^a	1500	-90°	0
8	Linha de Gás	2	4505	Ver Tabela 13.4	0
9	Linha de Gás	2	1515	0°	0

Tabela 13.2. Caso 2 - Descrição das arestas da rede

Tabela 13.3. Caso 2 - Perfil da aresta 2

Comprimento (m)	0	1500	2505
Cota (m)	-1400	-1400	-1500
Coordenada x (m)	0	0	0
Coordenada y (m)	1500	3000	4000

Tabela 13.4. Caso 2 - Perfil da aresta 8

Comprimento (m)	0	1005	2505	4005	4505
Cota (m)	-1495	-1395	-1395	-1395	-1400
Coordenada x (m)	0	0	0	0	400
Coordenada y (m)	4000	3000	1500	0	-300

A rede tem um ponto de entrada de líquido representado pelo vértice 7 na cota inferior do poço e um ponto de entrada de gás na plataforma representado pelo vértice 10. O vértice 4 representa a chegada do *riser* de óleo na plataforma (antes da válvula *choke*) e está especificado como um ponto de pressão fixa. Os outros vértices correspondem a pontos de interconexão. A descrição desses vértices é apresentada na Tabela 13.5. As especificações nodais da rede estão detalhadas na Tabela 13.6.

^a Diâmetro hidráulico

Vértice Y (m) Descrição X(m)Cota (m) 1 0 0 -1400 Entrada da linha de produção 2 Interconexão da linha de produção 0 1500 -14003 Conexão da linha de produção com o riser 0 4000 -1500 4 Saída do riser de óleo 0 4000 0 400 5 Cabeça do poço -300 -1400 400 6 Conexão entre anular de gás e poço -300 -2900 7 Base do poço (downhole) 400 -300 -3200 8 Entrada do anular de gás 400 -300 -1400 9 0 Interconexão das linhas de gás 4000 -1495 Entrada de gás 10 0 4000 20

Tabela 13.5. Caso 2 - Descrição dos vértices

Tabela 13.6. Caso 2 - Especificações

Vértice	Tipo	Especificação 1	Especificação 2
1, 2, 3, 5, 6, 8 e 9	Conexão	$W_{L,i}$ =0 kg/s	$W_{G,i}=0$ kg/s
4	Pressão fixa	$P_{T,4} = 15 \text{ bar}$	$H_{L,4}$ =1.0
7	Saída de óleo	$W_{L,7}$ igual à produção de óleo	$W_{G7} = 0 \text{ kg/s}$
10	Entrada de gás	$W_{G,10}$ igual à injeção de gás	$W_{L,10} = 0 \text{ kg/s}$

O modelo bifásico para essa rede consiste de 94 equações: 10 balanços de massa de líquido nos vértices, 10 balanços de massa de gás nos vértices, 9 balanços de momento nas arestas, 18 balanços de momento nos vértices, 18 equações de *hold-up* nas extremidades das arestas, 9 equações de transferência de *hold-up* de vértices e 20 especificações.

13.2.1 Simulação

Variando-se a vazão mássica de gás injetado e a vazão de óleo produzido assim como feito no exemplo anterior, obtém-se o gráfico de curvas de nível para pressão de *downhole* mostrado na Figura 13.6. Verifica-se que para uma pressão no *downhole* de 220 bar, para produzir 10.0 kg/s de óleo é necessário injetar uma vazão de gás de 2.7 kg/s e a produção máxima é de 10.7 kg/s para uma injeção de 1.8 kg/s.

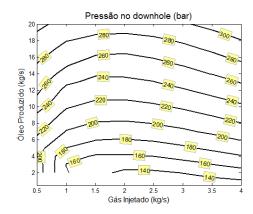


Figura 13.6. Caso 2 - Curvas de nível para pressão na base do poço (downhole)

A análise desses resultados confirma que o modelo é capaz de prever comportamentos normalmente verificados em operações de elevação de petróleo:

- Considerando um valor fixo de pressão na base do poço, um aumento na vazão de gás injetado é capaz de aumentar a vazão de líquido.
- Há uma vazão máxima de líquido que é obtida para uma determinada vazão crítica de gás. Se a vazão de gás é elevada a valores superiores a esse valor crítico, uma redução na vazão de líquido é observada.

Outra importante variável a ser considerada é a pressão na descarga do compressor ou a pressão na entrada da linha de gás (vértice 10). Os resultados para essa variável são apresentados na Figura 13.7. É possível observar valores elevados de pressão para altas vazões de gás. Para comparação, a simulação considerando as linhas de gás (arestas 8 e 9) com diâmetro de 3 polegadas é apresentada na Figura 13.8.

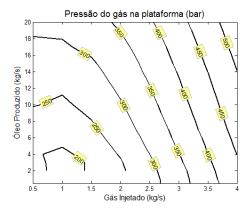


Figura 13.7. Caso 2 - Curvas de nível da pressão na entrada da linha de gás (linha de 2 in)

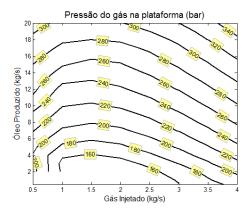


Figura 13.8. Caso 2 - Curvas de nível da pressão na entrada da linha de gás (linha de 3 in)

13.2.2 Máxima produção

A função objetivo Ω_1 é maximizada considerando diferentes pressões de *downhole* variando de 180 a 260 bar e uma estimativa inicial de 10 kg/s de óleo produzido e 2 kg/s de gás injetado. Para esses cenários, o índice de produção é igual a infinito, que corresponde à pressão de *downhole* igual à pressão do reservatório. As soluções obtidas estão resumidas nas Figura 13.9 e Figura 13.10. É verificado que a vazão ótima de gás injetado varia de 1.55 a 1.85 kg/s.

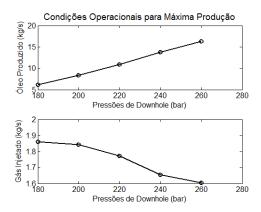


Figura 13.9. Caso 2 - Máxima produção para diferentes pressões de downhole

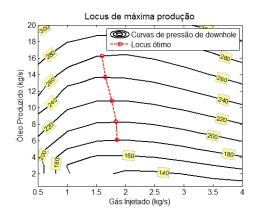


Figura 13.10. Localização dos pontos de máximo para diferentes pressões de downhole

13.2.3 Máxima produção considerando o índice de produção

A função objetivo Ω_1 é maximizada considerando uma pressão de reservatório de 220 bar, diferentes índices de produção variando de 0.5 a 10 (kg/s)/bar e uma estimativa inicial de 10 kg/s de óleo produzido e 2 kg/s de gás injetado. As soluções obtidas estão resumidas na Figura 13.11.

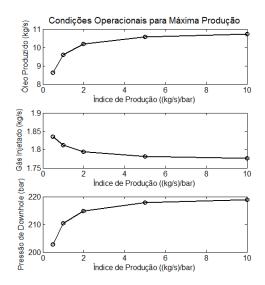


Figura 13.11. Máxima produção para diferentes índices de produção

Um comportamento bastante típico para poços de petróleo é a redução do índice de produção com o passar dos anos de exploração. Conforme apresentado na Figura 13.11, a vazão de gás injetado deve ser ajustada de modo a garantir a produção máxima ao longo do tempo de vida do poço.

13.2.4 Máximo lucro

A função objetivo Ω_2 é minimizada para diferentes preços de óleo. Com os resultados apresentados na Figura 13.12 e detalhados na Tabela 13.7, é possível determinar as condições operacionais de acordo com o preço do petróleo em comparação ao preço do gás combustível. Analisando os resultados da Tabela 13.7, é verificada uma redução da produção de óleo quando há baixa no preço do petróleo. No caso proposto, o impacto da relação entre o custo de gás e o preço do petróleo é baixo devido ao pequeno custo do gás se comparado ao retorno obtido pela produção de óleo.

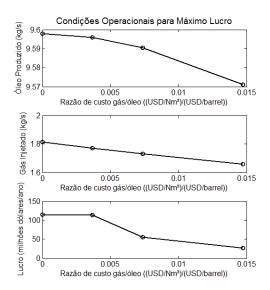


Figura 13.12. Máximo lucro para diferentes cenários de preços de óleo

Tabela 13.7. Resultados para busca do máximo lucro

Cenário	1	2	3	Max
Razão de custo/preço	14.74	7.37	3.69	0
$10^3 ((USD / Nm^3)/(USD / barril))$	14.74	7.57	3.07	O
Custo do gás (USD / Nm³)	0.1886	0.1886	0.1886	0
Preço do óleo (USD / barril)	12.79	25.58	51.15	51.15
Pressão do reservatório (bar)	220	220	220	220
Índice de produção ((kg/s)/bar)	1.0	1.0	1.0	1.0
Óleo produzido (kg/s)	9.571	9.591	9.596	9.598
Gás injetado (kg/s)	1.658	1.730	1.770	1.812
Pressão no downhole (bar)	210.43	210.41	210.40	210.40
Potência do compressor (kW)	1002.7	1051.8	1078.9	1108.1
Pressão de descarga (bar)	269.18	274.03	276.74	279.68
Lucro (106 USD/ano)	26.96	55.56	112.82	114.56

13.3 CASO 3 - REDE TIPO ÁRVORE COM MÚLTIPLOS POÇOS OFFSHORE

Nesse caso será feita a aplicação do modelo proposto em uma rede de dutos que contém quatro poços de petróleo compartilhando uma linha de produção única em uma topologia do tipo árvore conforme mostrado na Figura 13.13. Essa rede é composta por 28 vértices e 27 tubulações de acordo com o digrafo mostrado na Figura 13.14 (onde os vértices 5, 11, 17 e 23 correspondem a poços e têm estrutura conforme representado na Figura 13.5).

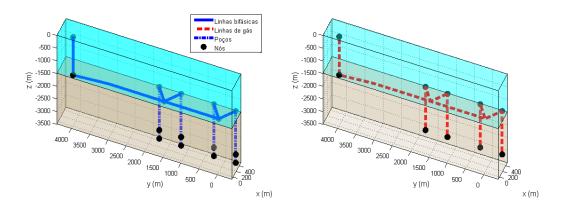


Figura 13.13. Caso 3 - Projeção isométrica simplificada

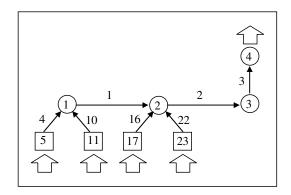


Figura 13.14. Caso 3 - Digrafo da rede de escoamento

As arestas da rede de escoamento são: linhas de produção (1 e 2), riser (3), do poço à linha de produção (n-1), poço (n e n+1), anular de gás (n+2) e linhas de gás (n+3 e n+4), onde n é igual a 5, 11, 17 ou 23 (ver Figura 13.5). Os parâmetros usados para descrever essas arestas estão mostrados nas Tabelas 13.8 a 13.11.

Aresta	Tipo	Diâmetro (in)	Comprimento (m)	Inclinação (°)	Rugosidade (µm)
1	Linha de Produção	6	1500	0°	100
2	Linha de Produção	6	4005	Ver Tabela 13.9	100
3	Riser	6	1500	90°	100
(<i>n</i> -1)	Poço à linha de produção	5	500	0°	100
(n)	Poço	5	1500	90°	100
(<i>n</i> +1)	Poço	5	300	90°	100
(<i>n</i> +2)	Anular de gás	5 ^a	1500	-90°	100
(n+3)	Linha de Gás	2	4505	Ver Tabelas 13.10 e 13.11	100
(n+4)	Linha de Gás	2	1515	0°	100

Tabela 13.8. Caso 3 - Descrição das arestas

Tabela 13.9. Caso 3 - Perfil da linha 2

Comprimento (m)	0	1500	2505
Cota (m)	-1400	-1400	-1500
Coordenada x (m)	0	0	0
Coordenada y (m)	1500	3000	4000

Tabela 13.10. Caso 3 - Perfis das arestas 8 e 14

Comprimento (m)	0	1005	2505	4005	4505
Cota (m)	-1495	-1395	-1395	-1395	-1400
Coordenada x (m)	0	0	0	0	a
Coordenada y (m)	4000	3000	1500	0	a

^a Em função das coordenadas da cabeça do poço.

Tabela 13.11. Caso 3 - Perfis das arestas 20 e 26

Comprimento (m)	0	1005	2505	4005
Cota (m)	-1495	-1395	-1395	-1395
Coordenada x (m)	0	0	0	a
Coordenada y (m)	4000	3000	1500	a

^a Em função das coordenadas da cabeça do poço.

Essa rede possui quatro pontos de entrada de líquido representados pelos vértices 7, 13, 19 e 25 na base dos poços e quatro pontos de entrada de gás na plataforma representados pelos vértices 10, 16, 22 e 28. O vértice 4 representa a saída do *riser* (antes da válvula de *choke*) e é descrito como um ponto de pressão fixa. Os outros vértices são pontos de interconexão das arestas. A descrição desses vértices está detalhada na Tabela 13.12. As especificações nodais da rede de escoamento estão mostradas na Tabela 13.13.

^a Diâmetro hidráulico.

Vértice	Descrição	X (m)	Y (m)	Cota (m)
1	Entrada da linha de Produção	0	0	-1400
2	Interconexão da linha de produção	0	1500	-1400
3	Conexão entre linha de produção e riser	0	4000	-1500
4	Saída do riser	0	4000	0
5	Cabeça do poço 1	400	-300	-1400
11	Cabeça do poço 2	400	300	-1400
17	Cabeça do poço 3	400	1200	-1400
23	Cabeça do poço 4	400	1800	-1400
(<i>n</i> +1)	Conexão entre anular de gás e poço	a	a	-2900
(n+2)	Base do poço (downhole)	a	a	-3200
(n+3)	Entrada do anular de gás	a	a	-1400
(n+4)	Interconexão das linhas de gás	0	4000	-1495
(n+5)	Entrada de gás	0	4000	20

Tabela 13.12. Caso 3 - Descrição dos vértices

Tabela 13.13. Caso 3 - Especificações nodais

Vértice	Tipo	Especificação 1	Especificação 2
1, 2, 3, (<i>n</i>), (<i>n</i> +1), (<i>n</i> +3) e (<i>n</i> +4)	Conexão	$W_{L,i}$ =0 kg/s	$W_{G,i}=0 \text{ kg/s}$
4	Pressão Fixa	$P_{T,4} = 15 \text{ bar}$	$H_{L,4}=1.0$
(n+2)	Entrada de óleo	$W_{L,i}$: produção do n -ésimo poço	$W_{G,i} = 0 \text{ kg/s}$
(n+5)	Entrada de gás	$W_{G,i}$: injeção no n -ésimo poço	$W_{L,i} = 0 \text{ kg/s}$

O modelo bifásico da rede consiste de 274 equações: 28 balanços de massa da fase líquida nos vértices, 28 balanços de massa da fase gás nos vértices, 27 balanços de momento nas arestas, 54 balanços de momento nos vértices, 54 equações de *hold-up* nas extremidades das arestas, 27 equações de transferência de *hold-up* de vértices e 56 especificações.

13.3.1 Simulação

Os resultados das simulações variando-se as vazões de gás injetado e de óleo produzido para cada poço (para uma mesma vazão de óleo e gás em cada poço) estão mostrados nas Figura 13.15 e Figura 13.16.

^a Em função das coordenadas da cabeça do poço.

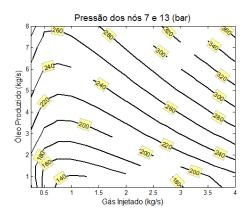


Figura 13.15. Caso 3 - Curvas de nível da pressão no downhole (vértices 7 e 13)

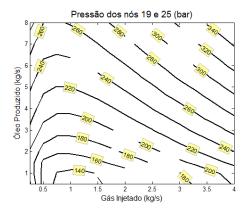


Figura 13.16. Caso 3 - Curvas de nível da pressão no downhole (vértices 19 e 25)

13.3.2 Máxima produção para diferentes pressões de reservatório

A função objetivo Ω_1 é maximizada considerando uma estimativa inicial de 3 kg/s de óleo produzido e 1 kg/s de gás injetado em cada poço. Dois cenários são analisados variandose a pressão de reservatório. As soluções obtidas são descritas na Tabela 13.14 e na Tabela 13.15.

Tabela 13.14. Caso 3 - Máxima produção para pressão de reservatório de 220 bar

Poço	1	2	3	4
Vértice	7	13	19	25
Índice de produção ((kg/s)/bar)	1.0	2.5	1.0	0.5
Pressão no downhole (bar)	215.80	218.03	214.85	211.61
Óleo produzido (kg/s)	4.204	4.933	5.152	4.197
Gás injetado (kg/s)	0.743	0.822	0.897	0.795

Poço	1	2	3	4
Vértice	7	13	19	25
Índice de Produção ((kg/s)/bar)	1.0	2.5	1.0	0.5
Pressão no downhole (bar)	234.58	237.43	233.44	229.45
Óleo produzido (kg/s)	5.417	6.423	6.561	5.276
Gás injetado (kg/s)	0.681	0.744	0.820	0.734

Tabela 13.15. Caso 3 - Máxima produção para pressão de reservatório de 240 bar

Analisando os resultados da otimização do sistema com múltiplos poços para máxima produção, as seguintes considerações podem ser formuladas:

- a) para poços com mesmo índice de produção e geometria similar (poços 1 e 3), mais gás deve ser injetado para os poços mais próximos à plataforma e, consequentemente, esses poços serão mais produtivos;
- b) para poços que estão a uma distância similar (poços 3 e 4), mais gás deve ser injetado em poços com maior índice de produção;
- c) comparando os cenários 1 e 2, quanto maior a pressão de reservatório, mais óleo é produzido com uma menor exigência de gás de injeção.

13.3.3 Máxima produção com restrições na disponibilidade de gás

Nesse estudo será feita a maximização da função objetivo Ω_1 com disponibilidade limitada de gás para injeção em poços com pressão de reservatório e índices de produção mostrados na Tabela 13.14. Variando-se a vazão total de gás disponível ($q_{G,max}$) é feito o mapeamento das condições operacionais ótimas de injeção nos quatro poços. Os resultados estão resumidos na Figura 13.17, onde no eixo das abscissas o valor de 100% corresponde à vazão de gás de 3.257 kg/s obtida somando-se as vazões injetadas para condição de máxima produção mostrada na Tabela 13.14.

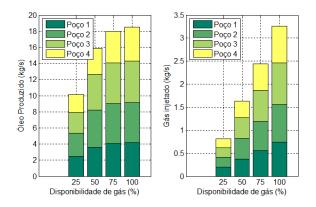


Figura 13.17. Caso 3- Influência da disponibilidade de gás

13.3.4 Projeto ótimo

A aplicação da função objetivo Ω_3 para o caso de rede com múltiplos poços offshore, com parâmetros descritos na Tabela 13.16, tem como objetivo a determinação do projeto ótimo considerando os custos anualizados do compressor, da turbina e das linhas de gás (que transportam o gás desde a plataforma até o anular dos poços) e de gás combustível.

As variáveis de decisão são as vazões de óleo produzidas de cada poço (W_L dos vértices 7, 13, 19 e 25), a vazão de gás injetado em cada poço (W_G dos vértices 10, 16, 22 e 28), o diâmetro das linhas de gás do poço 1 (arestas 8 e 9), do poço 2 (arestas 14 e 15), do poço 3 (arestas 20 e 21) e do poço 4 (arestas 26 e 27).

As estimativas iniciais das variáveis de decisão foram obtidas através da solução da otimização para máxima produção apresentada na Tabela 13.15 e diâmetros das linhas de gás iguais a 2 in.

Os resultados obtidos para o projeto ótimo estão apresentados nas Tabelas 13.17 a 13.19.

Tabela 13.16. Caso 3 - Parâmetros de projeto

Parâmetros	Valor	Unidade
Número de estágios de compressão (n)	3	-
Eficiência global do compressor (η)	0.8	-
Coeficiente politrópico do gás (γ)	1.25	-
Temperatura do gás injetado na succ ção $(T_{I\!N})$	300	K
Pressão do gás injetado na sucção $(P_{\it IN})$	5	bar
Peso molecular do gás injetado (MW)	25	kg/kmol
Custo do gás combustível (c_G)	0.189	USD/m³
Preço do óleo (c_L)	51.15	USD/barril
Comprimento (L_{GI}) - arestas 8 e 9	6020	m
Comprimento (L_{G2}) - arestas 14 e 15	6020	m
Comprimento (L_{G3}) - arestas 20 e 21	4520	m
Comprimento (L_{G4}) - arestas 26 e 27	4520	m
Limite inferior do diâmetro (LB)	1	in
Limite superior do diâmetro (UB)	4	in
Índice de produção - poço 1	1.0	(kg/s)/bar
Índice de produção - poço 2	2.5	(kg/s)/bar
Índice de produção - poço 3	1.0	(kg/s)/bar
Índice de produção - poço 4	0.5	(kg/s)/bar
Pressão do reservatório - cenário 1	220	bar
Pressão do reservatório - cenário 2	240	bar

Tabela 13.17. Caso 3 - Variáveis de decisão para projeto ótimo

Variáveis de decisão	Cenário 1	Cenário 2	Unidade
Vazão de gás injetado (Q_{GI}) - poço 1	0.706	0.647	kg/s
Vazão de gás injetado (Q_{G2}) - poço 2	0.785	0.709	kg/s
Vazão de gás injetado (Q_{G3}) - poço 3	0.854	0.780	kg/s
Vazão de gás injetado (Q_{G4}) - poço 4	0.752	0.697	kg/s
Vazão de óleo (Q_{Ll}) - poço ${f 1}$	4.197	5.411	kg/s
Vazão de óleo (Q_{L2}) - poço 2	4.952	6.444	kg/s
Vazão de óleo (Q_{L3}) - poço 3	5.152	6.559	kg/s
Vazão de óleo (Q_{L4}) - poço 4	4.170	5.246	kg/s
Diâmetro (D_{GI}) - arestas ${f 8}$ e ${f 9}$	1.77	1.66	In
Diâmetro (D_{G2}) - arestas 14 e 15	1.89	1.76	In
Diâmetro (D_{G2}) - arestas 20 e 21	1.75	1.63	In
Diâmetro (D_{G4}) - arestas 26 e 27	1.62	1.52	In

Resultados	Cenário 1	Cenário 2	Unidade
Potência do compressor (w_C)	1797.5	1691.1	kW
Pressão de descarga do compressor	235.44	258.02	Bar
Custo do compressor (C_C)	1.79	1.72	$10^6 \mathrm{USD}$
Custo da turbina (C_T)	3.95	3.76	$10^6 \mathrm{USD}$
Custo das linhas de gás (C_P)	1.05	0.98	$10^6 \mathrm{USD}$
Vazão anual de gás combustível	15.19	14.29	10 ⁶ m³/ano

Tabela 13.18. Caso 3 - Resultados para projeto compressor, linhas de gás e turbina

Tabela 13.19. Caso 3 - Resultados do projeto ótimo

Resultados	Cenário 1	Cenário 2	Unidade
Vazão total de gás injetado	81.39	74.45	$10^6 \text{m}^3 / \text{ano}$
Vazão total de óleo produzido	4.310	5.521	10 ⁶ barril / ano
Custo anualizado de gás combustível	2.86	2.69	10 ⁶ USD/ano
Custo de capital anualizado	6.79	6.46	10 ⁶ USD/ano
ISBL	6.79	6.46	$10^6 \mathrm{USD}$
OSBL	20.36	19.38	$10^6 \mathrm{USD}$
Receita	220.47	282.41	10 ⁶ USD/ano
Lucro	210.82	273.26	10 ⁶ USD/ano

Os parâmetros econômicos usados em (12.9), (12.11) e (12.12) estão sujeitos a desvios de acordo com o mercado e com a complexidade do empreendimento. Além disso, as principais empresas de petróleo tratam os dados econômicos reais relativos a custos de equipamentos, de linhas e de pessoal como segredos de negócio. Isso impede a apresentação da metodologia proposta em um caso real.

É importante reforçar que uma análise mais completa e, consequentemente, uma função objetivo mais detalhada pode ser aplicada de modo a gerar resultados mais precisos ao longo de todas as etapas do projeto de engenharia de um sistema de produção de petróleo. A metodologia apresentada possui precisão adequada para responder importantes questões do projeto conceitual de um novo empreendimento de produção de petróleo.

13.4CASO 4 - REDE CÍCLICA COM MÚLTIPLOS POÇOS *OFFSHORE*

Nesse caso será feita a aplicação do modelo proposto em um problema complexo de rede dotada de um ciclo e com quatro poços de petróleo compartilhando uma linha de produção única conforme mostrado na Figura 13.18. Essa rede é composta por 28 vértices e 27 tubulações de acordo com o digrafo mostrado na Figura 13.19 (onde os vértices 7, 13, 19 e 25 correspondem a poços e têm estrutura conforme representado na Figura 13.5).

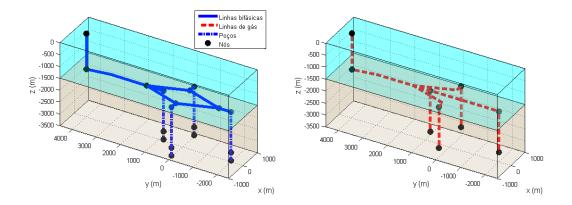


Figura 13.18. Caso 4 - Projeção isométrica simplificada

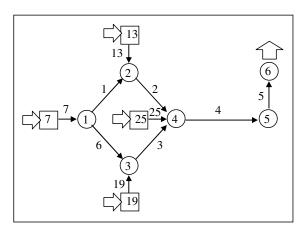


Figura 13.19. Caso 4 - Digrafo da rede de escoamento

As arestas da rede de escoamento são: linhas de produção (1, 2, 3, 4 e 6), riser (5), do poço à linha de produção (n), poço (n+1 e n+2), anular de gás (n+3) e linhas de gás (n+4 e n+5), onde n é igual a 7, 13, 19 ou 25 (ver Figura 13.5). Os parâmetros usados para descrever essas arestas estão mostrados nas Tabelas 13.20 a 13.22.

Amosto	Aresta Tipo Diân		Comprimento	Inclinação	Rugosidade
Aresta			(m)	(°)	(µm)
1	Linha de Produção	6	1581	0°	100
2	Linha de Produção	6	1581	0°	100
3	Linha de Produção	6	1581	0°	100
4	Linha de Produção	6	4005	Ver Tabela 13.21	100
5	Riser	6	1500	90°	100
6	Linha de Produção	6	1581	0°	100
(n)	Poço à linha de produção	5	500	0°	100
(n+1)	Poço	5	1500	90°	100
(<i>n</i> +2)	Poço	5	300	90°	100
(<i>n</i> +3)	Anular de gás	5 ^a	1500	-90°	100
(n+4)	Linha de Gás	2	4505	Ver Tabela 13.22	100
(n+5)	Linha de Gás	2	1515	0°	100

Tabela 13.20. Caso 4 - Descrição das arestas

Tabela 13.21. Caso 4 - Perfil da aresta 4

Comprimento (m)	0	1500	2505
Cota (m)	-1400	-1400	-1500
Coordenada x (m)	0	0	0
Coordenada y (m)	1500	3000	4000

Tabela 13.22. Caso 4 - Perfis das arestas 11, 17, 23 e 29

Comprimento (m)	0	1005	2505	4005	a
Cota (m)	-1495	-1395	-1395	-1395	-1400
Coordenada x (m)	0	0	0	0	a
Coordenada y (m)	4000	3000	1500	0	a

^a Em função das coordenadas da cabeça do poço.

Essa rede possui quatro pontos de entrada de líquido representados pelos vértices 9, 15, 21 e 27 na base dos poços e quatro pontos de entrada de gás na plataforma representados pelos vértices 12, 18, 24 e 30. O vértice 6 representa a saída do *riser* (antes da válvula de *choke*) e é descrito como um ponto de pressão fixa. Os outros vértices são pontos de interconexão das arestas; A descrição desses vértices está detalhada na Tabela 13.23. As especificações nodais da rede de escoamento estão mostradas na Tabela 13.24.

^a Diâmetro hidráulico.

Vértice	Descrição	X (m)	Y (m)	Cota (m)
1	Interconexão da linha de produção	0	-1500	-1400
2	Interconexão da linha de produção	500	0	-1400
3	Interconexão da linha de produção	-500	0	-1400
4	Interconexão da linha de produção	0	1500	-1400
5	Conexão entre linha de produção e riser	0	4000	-1500
6	Saída do riser	0	4000	0
7	Cabeça do poço 1	0	-2000	-1400
13	Cabeça do poço 2	800	0	-1400
19	Cabeça do poço 3	-800	0	-1400
25	Cabeça do poço 4	0	800	-1400
(<i>n</i> +1)	Conexão entre anular de gás e poço	a	a	-2900
(n+2)	Base do poço (downhole)	a	a	-3200
(n+3)	Entrada do anular de gás	a	a	-1400
(n+4)	Interconexão das linhas de gás	0	4000	-1495
(n+5)	Entrada de gás	0	4000	20

Tabela 13.23. Caso 4 - Descrição dos vértices

Tabela 13.24. Caso 4 - Especificações nodais

Vértice	Tipo	Especificação 1	Especificação 2
1, 2, 3, 4, 5, (<i>n</i>), (<i>n</i> +1), (<i>n</i> +3) e (<i>n</i> +4)	Conexão	$W_{L,i}$ =0 kg/s	$W_{G,i}$ =0 kg/s
6	Pressão Fixa	$P_{T,4} = 15 \text{ bar}$	$H_{L,4}=1.0$
(n+2)	Entrada de óleo	$W_{L,i}$: produção do n -ésimo poço	$W_{G,i} = 0 \text{ kg/s}$
(n+5)	Entrada de gás	$W_{G,i}$: injeção no n -ésimo poço	$W_{L,i} = 0 \text{ kg/s}$

O modelo bifásico da rede consiste de 300 equações: 30 balanços de massa da fase líquida nos vértices, 30 balanços de massa da fase gás nos vértices, 30 balanços de momento nas arestas, 60 balanços de momento nos vértices, 60 equações de *hold-up* nas extremidades das arestas, 30 equações de transferência de *hold-up* de vértices e 60 especificações.

13.4.1 Valores e perfis

Considerando-se as seguintes especificações: (i) vazão externa de líquido (produção nos poços) para os vértices 9, 15, 21 e 27 de 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 kg/s, (ii) vazões externa de gás (injeção de gás) para os vértices 12, 18, 24 e 30 de 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5 kg/s e (iii) demais valores apresentados na Tabela 13.24, os resultados da simulação estão descritos detalhadamente nas Figura 13.20 e Figura 13.21. O comportamento da pressão ao longo do escoamento dentro dos poços, na linha de produção/riser e no transporte do gás é mostrado, respectivamente, nos perfis das Figuras 13.22 a 13.24.

^a Em função das coordenadas da cabeça do poço.

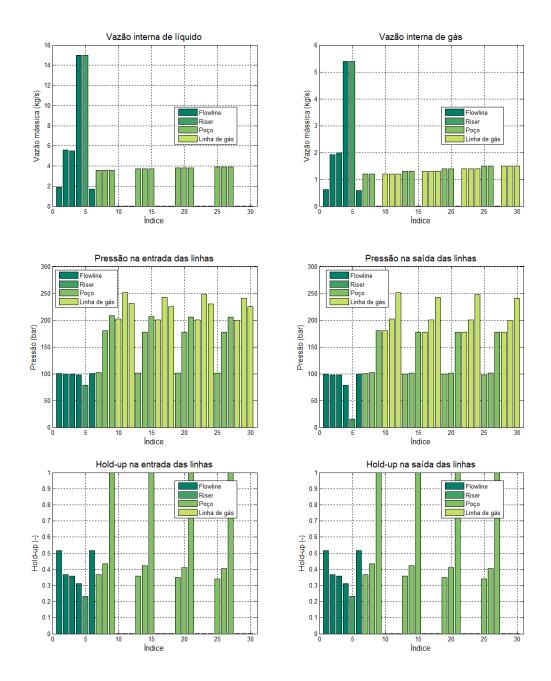


Figura 13.20. Caso 4 - Resultados para as variáveis de aresta

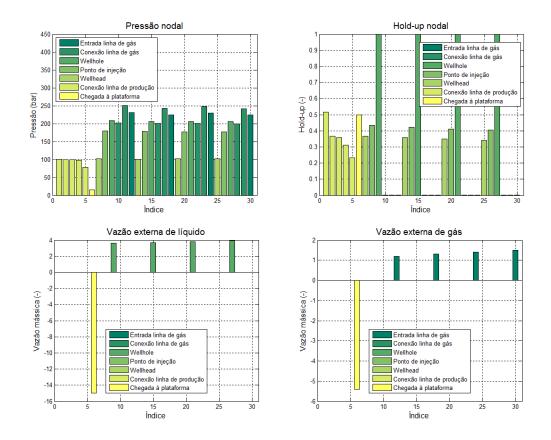


Figura 13.21. Caso 4 - Resultados para as variáveis de vértice

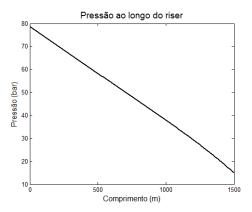


Figura 13.22. Caso 4 - Perfil de pressão ao longo do riser

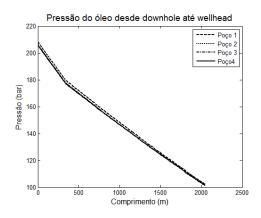


Figura 13.23. Caso 4 - Perfil de pressão nos poços

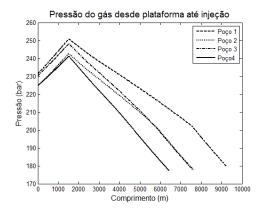


Figura 13.24. Caso 4 - Perfil de pressão no transporte de gás entre a plataforma e o poço

13.4.2 Curvas de pressão

Os resultados das simulações variando-se as vazões de gás injetado e de óleo produzido para cada poço (para uma mesma vazão de óleo e gás em cada poço) estão mostrados nas Figuras 13.25 a 13.28.

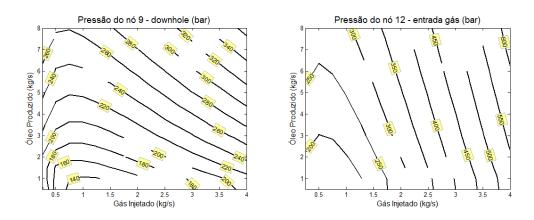


Figura 13.25. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 1

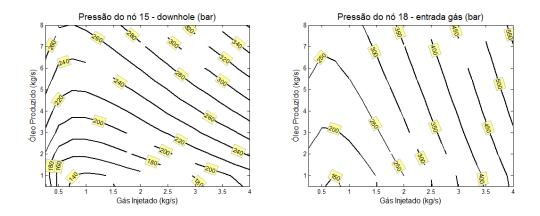


Figura 13.26. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 2

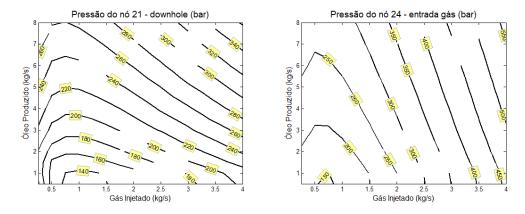


Figura 13.27. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 3

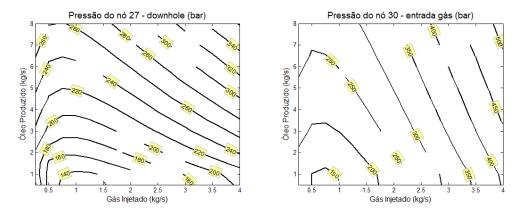


Figura 13.28. Caso 4 - Curvas de nível da pressão no downhole e na entrada de gás - poço 4

Conclusões 224

14 CONCLUSÕES

Nessa tese foram apresentados modelos de escoamento monofásico e bifásico, constituídos por equações diferenciais parciais a partir de balanços de massa e momento de cada fase, descritos na forma primitiva matricial. Essa representação adotada facilita a solução dos modelos e, além disso, permite utilizar variáveis de estado com significado físico simples, facilitando a imposição de condições de contorno (requisito mandatório para o emprego desses modelos em uma abordagem de redes de escoamento).

O modelo de escoamento bifásico a quatro equações descrito nessa tese é composto por equações de fechamento que são dependentes do padrão de escoamento. Os trabalhos mostrados na literatura descrevem o emprego de técnicas de árvore de decisão para determinar qual o padrão de escoamento mais provável. Já no contexto dessa tese, chaveamentos entre os padrões de escoamento são feitos através de funções sigmoidais que são ajustadas de modo a evitar descontinuidades e, consequentemente, estabilizar a solução numérica das simulações estacionária e dinâmica. Como os trabalhos na literatura focam na modelagem para um padrão de escoamento fixo, essa abordagem contínua é inovadora e possibilita a simulação para qualquer padrão de escoamento. Em suma, apresentou-se um arcabouço matemático capaz de acoplar a metodologia de identificação de padrões de escoamento descrita em Crowe (2006) às equações de fechamento do modelo dinâmico bifásico, compondo assim um modelo apto para a descrição do comportamento do escoamento bifásico para qualquer padrão de escoamento válido para uma ampla faixa de condições operacionais.

A utilização desse modelo na simulação dinâmica onde ocorre transição entre os padrões de escoamento ainda requer um estudo mais detalhado. Deve-se buscar, em trabalhos posteriores, determinar o efeito dos parâmetros de suavização das funções sigmoidais sobre a estabilidade da transição entre os padrões de escoamento. Além disso, deve-se destacar que a metodologia de Crowe (2006) está focada no comportamento estacionário, de modo que seu emprego em simulações dinâmicas, principalmente para os casos de transição, devem ser estudados com maior profundidade.

Nessa tese fez-se um retorno à utilização das clássicas correlações de escoamento bifásico desenvolvidas por Beggs e Brill (1973) tanto com um enfoque da modelagem dinâmica simplificada quanto para a modelagem estacionária de redes de escoamento.

Conclusões 225

Através de um modelo dinâmico a três equações utilizando equações de fechamento baseadas nas correlações de Beggs e Brill (1973), foi possível desenvolver um modelo dinâmico a 3 equações, que tem um menor consumo de tempo computacional para sua solução mantendo uma precisão tolerável para os problemas práticos da engenharia. Cabe destacar que nessa tese foram feitas modificações matemáticas no modelo Beggs e Brill (1973) de modo a suavizar transições entre padrões de escoamento (que em seu formato original ocasiona descontinuidades numéricas).

Em relação aos métodos numéricos, não foram propostas melhorias ou novas abordagens, no entanto, deve-se destacar o mérito de se utilizar uma notação matricial comum para a representação de diferentes métodos para a discretização de um sistema de equações diferenciais parciais (também com formato matricial), como: *Galerkin*, *Petrov-Galerkin*, diferenças finitas centrais e diferenças finitas *upwind*. Essa representação matricial comum permite uma comparação direta entre os sistemas de equações diferenciais ordinárias resultantes.

É importante também destacar que abordou-se o emprego do método de *Galerkin* para a solução do problema de escoamento bifásico, algo que só é feito na literatura para problemas simplificados (Uchiyama, 1999).

Os métodos numéricos foram aplicados a problemas simplificados (modelo de Burgers e modelo de águas rasas) com o simples objetivo de validar a consistência e não com o foco na comparação entre os diversos métodos.

Deve-se destacar a principal contribuição desse trabalho: a simulação dinâmica de redes de escoamento bifásico. Como na literatura aberta não foram encontradas referências para a modelagem de redes de dutos em que mais de um fluido é transportado simultaneamente, acredita-se que os desenvolvimentos descritos nesse trabalho representam avanços ao estado da técnica da simulação de escoamento. A forma como foi organizado, o modelo baseado em representações matriciais, aos elementos que compõem a rede e a forma como foram definidas as condições de contorno contribuíram para geração de um modelo dinâmico de escoamento bifásico em redes de dutos composto por equações diferenciais ordinárias.

Esse modelo dinâmico de redes de escoamento pode utilizar diferentes modelos para a representação das tubulações, como: modelo bifásico a 4 equações, modelo bifásico a 3

Conclusões 226

equações ou modelo monofásico (nas arestas onde apenas uma das fases estiver presente). Foram ainda descritas diferentes formas de especificações que permitem representar, dentro da rede de escoamento, válvulas, separadores, válvulas de retenção, pontos de fornecimento, pontos de consumo e poços de petróleo, permitindo descrever complexas redes de escoamento.

Alguns estudos de caso demonstraram a capacidade do simulador dinâmico para a determinação do comportamento de diferentes estruturas como conjuntos de tubos conectados, redes de dutos com ciclos, poços de petróleo e poços de petróleo off-shore dotados de gas lift.

De modo a simplificar o emprego desse modelo para os diversos cenários e estudos desenvolvidos ao longo dessa tese, desenvolveu-se um simulador com interface gráfica amigável que permitiu uma vasta aplicação dos modelos e métodos numéricos.

A modelagem estacionária de rede de escoamento também foi tema de estudo nessa tese, que apresentou um modelo simplificado capaz de determinar o comportamento de redes complexas com qualquer topologia, dotadas de vários trechos de tubulação, vértices e ciclos. A correlação de Beggs e Brill (1973) foi utilizada para a determinação da perda de carga através da integração ao longo do comprimento de cada trecho de tubulação tanto no sentido do escoamento quanto no sentido contrário ao escoamento, garantindo assim a estabilização da solução numérica do modelo. O modelo obtido é representado matematicamente por um sistema de equações algébricas não-lineares que é facilmente resolvido através de métodos do tipo Newton-Raphson. O formato totalmente matricial, o emprego do modelo de Beggs e Brill (1973) para redes de escoamento e o cálculo da perda de carga por meio da integração em ambos os sentidos constituem inovações no estado da técnica do escoamento bifásico. Uma vantagem da abordagem proposta é a simplicidade matemática que garante a geração de resultados precisos com uma baixa demanda de tempo computacional se comparado a softwares comerciais, corroborando sua utilização junto a algoritmos de otimização.

De modo a exemplificar o emprego do modelo simplificado em um problema de grande interesse da indústria de petróleo, foi apresentada uma formulação para o problema de otimização não-linear da alocação de gás e do sistema de *gas lift* contínuo. Pelo acoplamento com o modelo bifásico estacionário simplificado de redes de escoamento constituiu-se um arcabouço capaz de responder três questões frequentemente abordadas pelas empresas de

Conclusões 227

petróleo: a máxima produção estimada, as condições operacionais ótimas do sistema de *gas lift* e o projeto ótimo do sistema de *gas lift*. A metodologia permite a análise de sistemas de produção complexos incluindo múltiplos poços compartilhando a mesma linha de produção, dotado ou não de ciclos. Diferentes estudos de caso exemplificam a aplicação do algoritmo de otimização.

Sugestões de trabalhos futuros:

- a) Avaliações e comparações entre os modelos dinâmicos bifásicos a 3 equações e a 4 equações;
- b) Exploração de cenários dinâmicos que impliquem em transições entre os diversos padrões de escoamento utilizando o modelo dinâmico bifásico a 5 equações, além do ajuste dos parâmetros das funções sigmoidais adotadas na metodologia de identificação de padrões de escoamento;
- c) Comparação entre os métodos numéricos apresentados e avaliação da desempenho para diferentes níveis de discretização dos trechos de tubulação;
- d) Solução dos modelos propostos utilizando métodos numéricos avançados e específicos para a matéria de escoamento multifásico (AUSM, HLFLW e MUSCL);
- e) Retirada da premissa de escoamento politrópico e inclusão do balanço de energia da mistura de modo a analisar a influência da transferência de calor sobre o comportamento dinâmico de cenários de elevação de petróleo em águas produndas;
- f) Utilização do modelo dinâmico contemplando a equação de balanço de energia para o ajuste do coeficiente adiabático do modelo bifásico a 4 equações, além da comparação entre o modelo rigoroso e o modelo ajustado;
- Aumento do rigor na descrição das equações de fechamento para o padrão intermitente pela incorporação da abordagem descrita por De Henau e Raithby (1995a);

Conclusões 228

 Inclusão de uma equação diferencial parcial e de uma variável de estado contínua para a identificação do padrão de escoamento nos modelos propostos que permita que permita a transição não-instantânea entre os padrões de escoamento;

- Estudo aprofundado dos efeitos da escolha de condições de contorno do tipo von Neumann para o hold-up das fases e seu efeito sobre a estabilidade da solução numérica obtida; e
- j) Estudo matemático do impacto do desaparecimento de uma das fases sobre a rigidez e a estabilidade de um modelo dinâmico a dois fluidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADRIANOV, N., **Analytical and Numerical Investigation of Two-Phase Flows**, Tese de doutorado, Universidade de Madgeburg, Abril, 2003.
- ALARCON, G., TORRES, C., GOMEZ, L. Global Optimization of Gas Allocation to a Group of Wells in Artificial Lift using Nonlinear Constrained Programming. Journal of Energy Resources Technology, 124: 262-268, 2002.
- ALMEIDA, R. C., GALEÃO, A. C. An adaptive Petrov-Galerkin formulation for the compressible Euler and Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 129, p. 157-176, 1996.
- 4 AL-SARKHI, A., HANRATTY, T. J. Effect of Pipe Diameter on Drop Size in a Horizontal Annular Gas-Liquid Flow, Int. J. Multiphase Flow, v. 28, p. 1617-1629, 2002.
- ANDRITSOS N., HANRATTY, T. J., Influence of Interfacial Waves in Stratified gas-liquid flows. AIChE Journal, v.33, p. 444-454, 1987.
- ASALI, J.C., Entrainment in Vertical Gas-Liquid Annular Flows. Tese de Doutorado, University of Illinois, 1984.
- ASHINO, R., NAGASE, M., VAILLANCOURT, R., Behind and Beyond the MATLAB ODE Suite. Computers and Mathematics with Applications, v. 40, p. 491-512, 2000.
- AZIZ, K., GOVIER, G.W., FOGARASI, M., Pressure Drop in Wells Producing Oil and Gas, J. Can. Pet. Technol, v. 11, p. 38-48, 1972.
- AZZOPARDI, B. J., **Drops in Annular Two-Phase Flow**. Int. J. Multiphase Flow, v. 23, p. 1-53, 1997.
- AZZOPARDI, B. J., HEWITT, G. F., Maximum Drop Sizes in Gas-Liquid Flows. Multiphase Science and Technology, v. 9, p. 109-204, 1997
- AZZOPARDI, B. J., **Turbulence Modification in Annular Gas/Liquid Flow**. Int. J. Multiphase Flow, v. 25, p. 945-955, 1999.
- BARBOSA, J. R., HEWITT, G. F., KONIG, G., RUCHARDSON, S. M., Liquid Entrainment, Droplet Concentration and Pressure Gradient at the Onset of Annular Flow in a Vertical Pipe, Int. J. Multiphase Flow, v. 28, p. 943-961, 2002.
- BARNEA, D. A Unified Model for Predicting Flow Pattern Transitions for the Whole Range of Pipe Inclinations. Int. J. Multiphase Flow, v. 13, p. 1-12, 1987.

- BARNEA, D. Effect of Bubble Shape on Pressure Drop Calculations in Vertical Slug Flow. International Journal of Multiphase Flow, 1: 79-89, 1990.
- BARNEA, D., BRAUNER, N., Holdup of the Liquid Slug in Two-Phase Intermittent Flow. Int. J. Multiphase Flow, v. 11, p. 43-49, 1985.
- BARNEA, D., SHOHAM, O., TAITEL, Y. Flow Pattern Transition for Downward Inclined Two-phase Flow: Horizontal to Vertical, Chem. Eng. Sci, v. 37, p. 735-740, 1982a.
- BARNEA, D., SHOHAM, O., TAITEL, Y., Flow Pattern Transition for Vertical Downward Two-Phase Flow, Chem. Eng. Sci, v. 37, p. 741-746, 1982b.
- BARNEA, D., TAITEL, Y. A Model for Slug Length Distribution in Gas-Liquid Slug Flow, Int. J. Multiphase Flow, v. 19, p. 829-838, 1993.
- BARRAGÁN-HERNÁNDEZ, V., VÁZQUEZ-ROMÁN, R., ROSALES-MARINES, L., GARCÍA-SÁNCHEZ, F. A strategy for simulation and optimization of gas and oil production. Computers and Chemical Engineering 30: 215-227, 2005.
- BEGGS, H.D., BRILL, J.P. **Two-Phase Flow in Pipes**, 4th ed., University of Tulsa Printer, USA, 1982.
- BEGGS, H.D., BRILL, J.P.. A Study of Two-Phase Flow in Inclined Pipes. Journal of Petroleum Technology, 607-617, 1973.
- BENDIKSEN K., BRANDT I., FUCHS P., LINGA H., MALNES D., MOE R., Two-Phase Flow Research at SINTEF and IFE: Some Experimental Results and a Demonstration of the Dynamic Two-Phase Flow Simulator, apresentado no Offshore Northern Seas Conference 1986, Stavanger, 1986.
- BENDIKSEN K., MALNES D., MOE R., NULAND S., **The Dynamic Two-fluid Model OLGA: Theory and Application**. SPE Production Engineering, v. 6, p. 171-180, 1991.
- BENDIKSEN, K, Norwegian Technical Keynote: Multiphase Flow e Flow Assurance A Game Changer for Subsea to Beach Developments, Apresentado na 2007 Paris Client Week INTSOK, 2007.
- BENDIKSEN, K. H., **An Experimental Investigation of the Motion of Long Bubbles in Inclined Tubes.** Int. J. Multiphase Flow, v.10, p. 467-483, 1984.
- BIBERG, D. A Mathematical Model for Two-Phase Stratified Turbulent Duct Flow, Multiphase Science and Technology, v. 19, n. 1, p. 1-48, 2007.

- BIBERG, D., Hold-up and Pressure Drop In Two-Phase Laminar Stratified Pipe Flow, Multiphase Science and Technology, v. 14, p. 267-301, 2002.
- BOURÉ, J. A., **Two-Phase Flow Models: The Closure Law**, Multiphase Science and Theory, v. 3, p. 3-30, 1987.
- BOURÉ, J. A., Wave Phenomena and One-Dimensional Two-Phase Flow Models Part I: KinematicsWaves; Experimental Results; Theory, Multiphase Science and Theory, v. 9, p. 1-35, 1997a.
- BOURÉ, J. A., Wave Phenomena and One-Dimensional Two-Phase Flow Models Part II: A Reference Case: Flow Without Mass Transfer of Two Fluids of Constant Properties, Multiphase Science and Theory, v. 9, p. 37-62, 1997b.
- BOURÉ, J. A., Wave Phenomena and One-Dimensional Two-Phase Flow Models Part III: General Case, Generalized Drift Flux Models, Other Two-fluids Models, Multiphase Science and Theory, v. 9, p. 63-107, 1997c.
- BROOKS, A. N., HUGHES, T. J. R., Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 32, p. 199-259, 1982.
- CAMPONOGARA, E., NAKASHIMA, P. Optimizing Gas Lift Optimization Problem using Dynamic Programming. European Journal of Operational Research, 174: 1220-1246, 2006.
- CHURCHILL, S., Friction-Factor Equation Spans all Fluid-Flow Regimes, Chemical Engineering., v. 84, 24, p. 91-92, 1977.
- COELHO, R. M. L., **Métodos numéricos para solução de sistemas hiperbólicos aplicados aos escoamentos compressíveis mono e bifásicos**, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Agosto, 2006.
- COLEBROOK, C. F., Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between smooth and rough pipe laws. Jour. Ist. Civil Engrs., London. Feb., p. 133, 1939.
- COQUEL, F., GALLOUET, T., HÉRARD, J. M., SEGUIN, N., Closure Laws for a Two-fluid Two-Pressure Model, C. R. Acad. Sci. Paris, v. 334, p.1-6, 2002.
- COSTA, A.L.H., MEDEIROS, J.L., PESSOA, F.L.P. Steady-State Modeling and Simulation of Pipeline Networks for Compressible Fluids. Brazilian Journal of Chemical Engineering, São Paulo, 15 (4): 344-357, 1998.

- COUPER, J.R., PENNEY, W.R., FAIR, J.R., WALAS, S.M.. Chemical Process Equipment, Selection and Design. Gulf Professional Publishing, Second Edition, 726 p., 2005.
- 40 CROWE, C. T., **Multiphase Flow Handbook**, CDC Press, 1^a edição, 2006.
- DE HENAU, V., RAITHBY, G. D., A Transient Two-fluid Model for the Simulation of Slug Flow in Pipelines I. Theory. Int. J. Multiphase Flow, v. 21, 335-349, 1995a.
- DE HENAU, V., RAITHBY, G. D., A Transient Two-fluid Model for the Simulation of Slug Flow in Pipelines II. Validation. Int. J. Multiphase Flow, v. 21, p. 351-363, 1995b.
- DE HENAU, V., RAITHBY, G. D., A Study of Terrain-Induced Slugging in Two-Phase Flow Pipelines, Int. J. Multiphase Flow, v. 21, p. 365-379, 1995c.
- DONEA, J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. Int. J. Num. Meth. Eng., v. 20, p. 101-119, 1984.
- DOUGLAS, J. Conceptual Design of Chemical Processes. First edition, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1988.
- DREW, D. A., PASSMAN, S. L. **Theory of Multicomponent Fluids.** Applied Mathematical Sciences, 135, 1999.
- DREW, D. A., WALLIS, G. B., Fundamentals of Two-Phase Flow Modeling, Multiphase Science and Technology, v. 8, p. 1-67, 1994.
- DUKLER, A. E., FABRE, J., Gas-Liquid Slug Flow: Knots and Loose Ends, Multiphase Science and Technology, v. 8, p. 355-469, 1994.
- DUKLER, A. E., HUBBARD, M. G., A Model for Gas Liquid Slug Flow in Horizontal and Near-Horizontal Tubes. Ind. Eng. Chem Fundam. V. 14, p. 337-347, 1985.
- DUKLER, A. E., MOALEM M. D., BRAUNER N., A Physical Model for Predicting the Minimum Stable Slug Length. Chem Eng. Sci., v. 40, p. 1379-1385, 1985.
- DUKLER, A. E., TAITEL, Y. Flow Pattern Transitions in Gas-Liquid Systems. Measurement and Modelling. Multiphase Science and Technology, Vol. II, G. F. Hewitt, J. M. Delhaye, and N. Zuber, Eds., Hemiphere, Washington, DC, 1986.
- DUTTA-ROY, K., KATTAPURAM, J. A new approach to gas-lift allocation optimization. In SPE 38333 presented at the SPE Western Regional Meeting, 1997.

- EATON, B.A., ANDREWS, D.E., KNOWLES, C.R., SILDERBERG, I.H., BROWN, K.E. The Prediction of Flow Patterns, Liquid Holdup and Pressure Losses Ocurring During Continuous Two-Phase Flow in Horizontal Pipelines. Journal of Petroleum Technology, 12: 815-828, 1967.
- FANG, W.Y., LO, K.K. A Generalized Well-Management Scheme for Reservoir Simulation. SPE Reserv. Eng., 11: 116-120, 1996.
- FINLAYSON, B.A. **Nonlinear Analysis in Chemical Engineering**, McGraw Hill, 1980.
- FLANIGAN, O. Effect of Uphill Flow on Pressure Drop in Design of Two-Phase Gathering Systems. Oil and Gas Journal, 56: 132-141, 1958.
- 57 FLOQUET, P., JOULIA, X., VACHER, A., GAINVILLE, M., PONS, M. Numerical and Computational Strategy for Pressure-driven Steady-state Simulation of Oilfield Production. Computers and Chemical Engineering, 33: 660–669, 2009.
- FORE, L. B., BEUS, S. G., BAUER, R. C., Interfacial Friction in Gas-Liquid Annular Flow: Annalogies to Full and Transition Roughness. Int. J. Multiphase Flow, v. 26, p. 1755-1769, 2000.
- FORE, L. B., DUKLER, A.E., The distribution of Drop Size and Velocity in Gas-Liquid Annular Flow, Int. J. Multiphase Flow, v. 21, p. 137-149, 1995.
- FORE, L.B., DUKLER, A.E., **Droplet Deposition and Momentum Transfer in Annular Flow.** AIChE Journal, v. 41, p. 2040-2046, 1999.
- FRANCA, L. P., DUTRA DO CARMO, E. G. **The Galerkin gradient least-squares method.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 74, p. 41-54, 1989.
- GALEÃO, A. C. DUTRA DO CARMO, E. G., A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 68, p. 83-95, 1988.
- GALLOUET, T., HÉRARD, J. M., SEGUIN, N., Numerical Modeling of Two-Phase Flows using the Two-fluid Two-Pressure Approach, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, v. 14, p. 663-770, 2004.
- GOLAN, L. P., STENNING, A. H., **Two-Phase Vertical Flow Map**, Proc. Instn. Mech. Engrs., 184, 3C, p. 108-114, 1969.
- GOMEZ, L. E., SHOHAM, O., TAITEL, Y., **Prediction of Slug Liquid Hold-up: Horizontal to Upward Vertical Flow**, Int. J. Multiphase Flow, v. 26, p. 517-521, 2000.

- GOVIER, G. W., OMER, M. M. An Horizontal Pipeline Flow of Air-Water Mixtures, Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 40, p. 93-104, 1962.
- GOVIER, G.W. AZIZ, K., **The Flow of Complex Mixtures in Pipes**, New York, N.Y., Van Nostrand Rheinhold, 1972.
- HAALAND S. E., Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow. Journal of Fluids Engineering, v. 105, p. 89-90, 1983.
- HAGEDORN, A.R., BROWN, K.E. Experimental Study of Pressure Gradients Occurring During Continuous Two-Phase Flow in Small-Diameter Vertical Conduits. Journal of Petroleum Technology, 17 (4): 475-484, 1965.
- HASAN, A.R., KABIR, C.S. Two-Phase Flow in Vertical and Inclined Annuli. International Journal of Multiphase Flow, 18 (2): 279-293, 1992.
- HEWITT, G.F., **Prediction of Multiphase Flow: A Personal View**, Multiphase Science and Technology, v. 15, n. 1-4, p. 289-292, 2003.
- HEWITT, G.F., WHALEY, P. B., **Vertical Annular Two-Phase Flow**, Multiphase Science and Technology, v. 4, p. 103-181, 1989.
- HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 73, p. 173-189, 1989
- HUGHMARK, G.A. **Holdup in gas-liquid flow.** Chemical Engineering Progress, v. 53, p. 62-65, 1962.
- ISHII, M., HIBIKI, T. **Thermo-fluid Dynamics: Theory of two-phase flow.** New York, USA. 2006, Springer.
- ISHII, M., Interfacial Area Modeling, Multiphase Science and Technology, v. 3, p. 31-61, 1987.
- ISHII, M., **Interfacial Characteristics of Two-Phase Flow**, Multiphase Science and Technology, v. 18, p. 1-29, 2006.
- ISHII, M., **Two-fluid Model for Two-Phase Flow**, Multiphase Science and Technology, v. 5, p. 1-63, 1990.
- ISSA, R. I., KEMPF, M. H. W., Simulation of Slug Flow in Horizontal and Nearly Horizontal Pipes with the Two-fluid Model, Int. J. Multiphase Flow, v. 29, p. 69-95, 2003.

- KING, M. J. S., HALE, C. P., LAWRENCE, C., J., HEWITT, G., F., Characteristics of Flowrate Transients in Slug Flow, Int. J. Multiphase Flow, v. 24, p. 825-854, 1998.
- KOSMIDIS, V., PERKINS, J., PISTIKOPOULOS, E. A Mixed Integer Optimization Formulation for the Well Scheduling Problem on Petroleum Fields. Computers & Chemical Engineering, 29 (7): 1523–1541, 2005.
- KOSTERIN, S. I., Research into Structure of the Flow of Two-Phase Medium in Horizontal Tubes, Izv. Akad. Nauk. SSSR, otdel tekh Nauk, v. 7, p. 37-45, 1943.
- LAHEY, R. T., DREW, D. A., **On the Multidimensional Analysis of Two-Phase Flows**, Multiphase Science and Technology, v. 15, p. 99-129, 2003.
- LOCKHART, R. W., MARTINELLI, R. C., **Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Phase Two-Component Flow in Pipes**, Chem. Eng. Prog., v. 45, p. 39-45, 1949.
- LOUAKED M., HANICH L., **TVD Scheme for the Shallow Water Equations**, Journal of Hydraulic Research, v. 36, p. 363-378, 1998.
- MAH, R. S. H. **Chemical Process Structures and Information Flows**. In Series in chemical engineering. 1^a ed., Butterworths, 1990.
- MANOLIS, I. G., **High Pressure Gas-Liquid Slug Flow**, Tese de Doutorado, Imperial College of Science, Inglaterra, 1995.
- MASELLA, J. M., Tese de Doutorado, França, 1997.
- MASELLA, J. M., TRAN, Q. H., FERRE, D., PAUCHON, C. Transient simulation of two-phase flows in pipes, Int. J. Multiphase Flow, v. 24, p. 739-755, 1998.
- MCCOY, A.T. The Economics of CO₂ Transport by Pipeline and Storage in Saline Aquifers and Oil Reservoirs. Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, 2008.
- MUKHERJEE, H., BRILL, J.P. Pressure Drop Correlations for Inclined Two-Phase Flow. Journal of Energy Resources Technology, 1: 1003-1008, 1985.
- MUNKEJORD, S., T., Analysis of the Two-fluid Model and the Drift-flux Model for Numerical Calculation of Two-Phase Flow, Tese de Doutorado, Norwegian University of Science and Technology, Janeiro, 2006.
- NDJINGA, M., Influence of Interfacial Pressure on The Hyperbolicity of the Two-Fluid Model, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344, p.407–412, 2007.

- 94 NICHOLSON, M. K., AZIZ, K., GREGORY, G. A. Intermittent Two Phase Flow in Horizontal Pipes: Predictive Models. Can. J. Chem. Engng., v. 56, p. 653-663, 1978.
- NORRIS, L., Correlation of Prudhoe Bay Liquid Slug Lengths and Holdups Incluing 1981 Large Diameter Flowline Tests, Relatório Interno, Exxon Production Research Co., Houston, TX., 1982.
- OLIEMANS, R.V.A., Modelling of Gas Condensate Flow In Horizontal and Inclined Pipes, ASME Pipeline Symposium, ETCE, v.6, 1987.
- OLIEMANS, R.V.A., **Two-Phase in Gas-Transmission pipelines**, 76-Pet-25, Joint Petroleum Mechanical Engineering & Pressure Vessels and Piping Conference, Cidade do México, México, Setembro, 1976.
- OMGBA-ESSAMA, C., Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified and Flow Regimes), Tese de doutorado, Cranfield Univertisty, Abril, 2004.
- ORKISZEWSKI, J. **Predicting Two-Phase Pressure Drops in Vertical Pipe**. Journal of Petroleum Technology, 19: 829-838, 1967.
- PAN, L, HANRATTY, T. J., Correlation of Entrainment for Annular Flow In Horizontal Pipes, Int. J. Multiphase Flow, v. 28, p. 363-384, 2002a.
- PAN, L, HANRATTY, T. J., Correlation of Entrainment for Annular Flow In Horizontal Pipes, Int. J. Multiphase Flow, v. 28, p. 385-408, 2002b.
- PATANKAR, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, 1^a. ed., Hemisphere Publishing Corporation, USA, 1980.
- PAUCHON, C., DHULESIA, H., BINH-CIRLOT, G., FABRE, J. **TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation**. SPE Annual Technical Conference, SPE 28545, Nova Orleans, LA, USA, p. 25-28, 1994.
- PERRY, R.H., GREEN, D.W. (Eds.). Perry's Chemical Engineers' Handbook, 7^a. ed., McGraw-Hill, New York, USA, 1997.
- PIRES NETO, J. P., Modelagem Dinâmica em Redes de Escoamento Compressível para Aplicações à Detecção de Vazamentos em Tempo Real, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.
- POTS, B. F. M., An Omni-Angle Flow Pattern Map for Gas/Liquid Two-Phase Flow in Pipes, Internal Shell Report, 1985.

- PROSPERETTI, A., Two-fluid Modelling and Averaged Equations, Multiphase Science and Technology, v. 15, p. 181-192, 2003.
- RAY, T., SARKER, R. Genetic Algorithm for Solving a Gas Lift Optimization Problem. Journal of Petroleum Science and Engineering, 59: 84-96, 2007.
- RITCHTER, H. J., **Flooding in Tubs and Annuli**. Int. J. Multiphase Flow, v. 7, p. 647-658, 1981.
- ROE, P. L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, J. Comp. Physics, v. 42, p. 357-372, 1981.
- SARICA, C., SHOHAM, O., A simplified transient model for pipeline-riser systems, Chem. Engng Sci., v. 46, p. 2169-2179, 1991.
- SCANDPOWER, Manual do usuário, Olga 2000, 2005.
- SCOTT, S., SHOHAM, O., BRILL, J. P., **Prediction of Slug Length in Horizontal Large Diameter Pipes.** 56th SPE Annual California Regional Meeting, Oakland, California, Abril, 1986.
- SERIZAWA, A., KATAOKA, I. **Dispersed Flow I**, Multiphase Science and Technology, v. 8, p. 125-194, 1994.
- SHAKIB, F., HUGHES, T. J. R. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v, 87 (1), 1991, p. 35-58, 1991.
- SHEMER, L., GULITSKI, A., BARNEA, D. Movement of Two Consecutive Taylor Bubbles in Vertical Pipes, Multiphase Science and Technology, v. 19, p. 99-120, 2007.
- SIMMONS, M., HANRATTY, T.J., **Droplet Size Measurements in Horizontal Annular Gas–Liquid Flow**. Int. J. Multiphase Flow, v. 27, p. 861–883, 2001.
- SONG, J. H., ISHII, M., **On the Stability of a One-Dimensional Two-Fluid Model**, Nuclear Engineering and Design, v. 204, p. 101-115, 2001.
- SOUZA, J.N.M.; MEDEIROS, J.L.; COSTA, A.L.H., A Two-Phase Transient Flow Model for Undersea Risers of Oil and Gas Production. Proceedings of ENPROMER 2005 (Paper 1234). 4th Mercosur Congress on Process Systems Engineering. Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2005.

- SOUZA, J.N.M.; MEDEIROS, J.L.; COSTA, A.L.H., Modelagem Dinâmica do Escoamento Bifásico em Risers de Exploração de Petróleo em Águas Profundas. Boletim Técnico da PETROBRAS, Rio de Janeiro, v. 47, n. 1, p. 49-87, 2004.
- STORKAAS, E., SKOGESTAD, S., ALSTAD, V. Estabilization of Desired Flow Regimes in Pipelines, Relatório Interno, Norwegian University of Science and Technology, Noruega, 2001.
- TAITEL, Y., BARNEA, D., A Consistent Approach for Calculating Pressure Drop in Inclined Slug Flow, Chemical Engineering Science, v. 45, p 1199-1206, 1990.
- TAITEL, Y., BARNEA, D., DUKLER, A. E., Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes, AIChE Journal, v. 26, p. 345-354, 1980.
- TAITEL, Y., BARNEA, D., Simplified Transient Simulation of Two-Phase Flow Using Quasi-Equilibrium Momentum Balances, Int. J. Multiphase Flow, v. 33, p. 493-501, 1997.
- TAITEL, Y., DUKLER A. E., A Model For Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal and Near-Horizontal Gas-Liquid Flow. AIChE Journal, v. 22, p. 47-55, 1976.
- TAITEL, Y., SHOHAM, O., BRILL, J.P. Simplified transient solution and simulation of two-phase flow in pipelines, Chem. Eng. Sci., v.44, p.1353-1359, 1989.
- TAITEL, Y., **Stability of Severe slugging**, Int. J. Multiphase Flow, v. 12, p. 203-217, 1986.
- TORO, E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. 3^a. edição, Springer, 1997.
- UCHIYAMA, T. Petrov-Galerkin finite element method for gas-liquid two-phase flow based on an incompressible two-fluid model, Nuclear Engineering and Design, v. 193, p. 145-157, 1999.
- ULLMANN, A., BRAUNER, N. Closure Relations for the Shear Stress in Two-fluid Models for Core-Annular Flow, Multiphase Science and Technology, v. 16, p. 355-387, 2004.
- ULLMANN, A., ZAMIR, M., BRAUNER, N., Multi-holdups in Co-current Stratified Flow in Inclined Tubes, Int. J. Multiphase Flow, v. 29, p. 1565-1581, 2003.
- WALLIS, G., B., Interfacial Friction Modelling, Multiphase Science and Technology, v. 3, p. 63-83, 1987.

- ZHANG, D.Z., PROSPERETTI, A. Momentum and Energy Equations for Disperse Two-Phase Flows and Their Closure for Dilute Suspensions, Int. J. Multiphase, v. 23, n. 3, p. 425-453, 1997.
- ZIENKIEWICZ, O. C., **The Finite Element Method.** Vols. I, II e III, 5^a edição, McGraw-Hill, 2000.
- ZUBER, N., FINDLAY, J.A. Average volumetric concentration in two-phase flow systems, J. Heat Transfer, v. 87, p. 453-468, 1965.

APÊNDICE I - NOTAÇÃO MATEMÁTICA

VETORES E MATRIZES

Definições

Vetores são representados por letras sublinhadas (\underline{u} , \underline{U}) e são definidos como vetores coluna. Matrizes são representadas por letras com sublinhado duplo (\underline{v} , \underline{V}). A operação de transposição da matriz \underline{V} é representada pelo sobrescrito T como em \underline{V}^T . A dimensão dos vetores e matrizes é descritas utilizando letras e números em negrito, por exemplo, a dimensão da matriz \underline{M} é \mathbf{N} x \mathbf{S} se \underline{M} possuir \mathbf{N} linhas e \mathbf{S} colunas.

O símbolo $A_{i,j}$, a depender do contexto, pode corresponder a:

- elemento da linha i e coluna j da matriz $\underline{\underline{A}}$; ou
- j-ésimo elemento do vetor \underline{A}_i .

Operações Matriciais

O símbolo \times denota multiplicação elemento a elemento (produto de Hadamard ou Schur).

O produto matricial entre as matrizes $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ é apresentado como $\underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{B}}$, tal que o número de colunas de $\underline{\underline{A}}$ seja igual ao número de linhas de $\underline{\underline{B}}$.

A concatenação entre vetores e/ou matrizes é representada através de colchetes tal que a matriz $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{bmatrix}$ corresponde à concatenação lado a lado das colunas das matrizes $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$.

Vetores e Matrizes Especiais

Um vetor e uma matriz que possuem todos os elementos representados pelo valor unitário são representados respectivamente por $\underline{1}$ e $\underline{1}$. Um vetor e uma matriz que possuem todos os elementos representados por valores nulos são representados respectivamente por $\underline{0}$ e $\underline{0}$.

Em algumas equações nessa tese optou-se por explicitar as dimensões (quantidade de linhas e colunas) dessas matrizes especiais na forma de índices, sendo o primeiro índice correspondente ao número de linhas e o segundo índice correspondente ao número de colunas. Por exemplo, a matriz 0_{NS} consiste de uma matriz N linhas e S colunas de elementos nulos.

TRANSFORMAÇÕES E OPERAÇÕES ESPECIAIS

diag: A transformação chamada de $diag(\underline{D})$ gera uma matriz $\underline{\underline{E}}$ que possui diagonal principal igual a \underline{D} e os demais elementos nulos.

sign: A operação sign(u) retorna o valor -1 caso u seja negativo, retorna o valor 0 se u for nulo e retorna +1 se u for positivo.

APÊNDICE II – DETERMINAÇÃO DOS CENTROS DE MASSA PARA ESCOAMENTO ESTRATIFICADO

A modelagem da correção da pressão das fases para escoamento estratificado requer a determinação do centro de massa das fases ao longo da seção transversal z_{CML} e z_{CMG} , onde:

$$z_{CML} = R + \frac{\iint\limits_{A_L(t)} z \, dy \, dz}{\iint\limits_{A_L(t)} 1 \, dy \, dz}$$
(A2-1)

$$z_{CMG} = R + \frac{\iint\limits_{A_G(t)} z \, dy \, dz}{\iint\limits_{A_G(t)} 1 \, dy \, dz}$$
(A2-2)

A mudança de coordenadas de cartesiana para cilíndrica simplifica significativamente a solução analítica dessas integrais. Em termos de coordenadas cilíndricas, corresponde a:

$$z_{CML} = R + \frac{\iint\limits_{A_L(t)} r^2 sen(\theta) dr d\theta}{\iint\limits_{A_L(t)} 1 dr d\theta}$$
(A2-3)

$$z_{CMG} = R + \frac{\iint\limits_{A_G(t)} r^2 sen(\theta) dr d\theta}{\iint\limits_{A_G(t)} 1 dr d\theta}$$
(A2-4)

Explicitando-se os limites de integração para o centro de massa,tem-se:

$$z_{CML} = R + \frac{\int_{\frac{3\pi}{2} - \beta}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2}} \int_{\frac{h-R}{sen(\theta)}}^{R} r^2 sen(\theta) dr d\theta}{\int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2}} \int_{\frac{h-R}{sen(\theta)}}^{R} 1 dr d\theta}$$
(A2-5)

$$z_{CMG} = R + \frac{\int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}} \int_{\frac{sen(\theta)}{sen(\theta)}}^{R} r^2 sen(\theta) dr d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}} \int_{\frac{sen(\theta)}{sen(\theta)}}^{R} 1 dr d\theta}$$
(A2-6)

Aplicando-se a definição de *h*, tem-se:

$$z_{CML} = R + \frac{\int_{\frac{3\pi}{2} - \beta}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2}} \int_{-R}^{R} \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(\theta)} r^{2} sen(\theta) dr d\theta}{\int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2}} \int_{-R}^{R} \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(\theta)} 1 dr d\theta}$$
(A2-7)

$$Z_{CMG} = R + \frac{\int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}} \int_{-R}^{R} \frac{r^2 sen(\theta) dr d\theta}{sen(\theta)}$$

$$Z_{CMG} = R + \frac{\int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}} \int_{-R}^{R} \frac{sen(\theta)}{sen(\theta)} dr d\theta}$$
(A2-8)

Resolvendo-se analiticamente as integrais, chega-se a:

$$z_{CML} = D\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3(-\beta + sen(\beta))}sen^{3}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$
 (A2-9)

$$z_{CMG} = D\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3(2\pi - \beta + sen(\beta))}sen^{3}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$
 (A2-10)

Utilizando a definição de β chega-se a:

$$z_{CML} = D\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi\alpha_L} sen^3\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$
 (A2-11)

$$z_{CMG} = D\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi\alpha_G} sen^3\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$
 (A2-12)

APÊNDICE III - INTEGRAÇÃO DAS MATRIZES DO MÉTODO DE GALERKIN

INTRODUÇÃO

O método de *Galerkin* requer a integração dos coeficientes do modelo ao longo de cada elemento sob as funções peso.

$$\underline{\underline{H}}_{1} = \int_{a}^{b} \underline{\underline{M}}_{A}(\theta) \psi(\theta) d\theta$$

$$\underline{\underline{H}}_{2} = \int_{a}^{b} \underline{\underline{M}}_{B}(\theta) \psi(\theta) d\theta$$
(A3.1)

Através do método de quadratura gaussiana, tem-se:

$$\underline{\underline{H}}_{1} = \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{l=1}^{n} \underline{\underline{M}}_{A}(\theta_{l}) \psi(\theta_{l}) \Psi_{l}$$

$$\underline{\underline{H}}_{2} = \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{l=1}^{n} \underline{\underline{M}}_{B}(\theta_{l}) \psi(\theta_{l}) \Psi_{l}$$

$$\theta_{l} = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \eta_{l}$$
(A3.2)

onde η_l são as coordenadas dos pontos de quadratura de ordem n e Ψ_l são os pesos de quadratura de ordem n. Tipicamente nesta tese será utilizada a ordem de quadratura igual a 3. Desse modo, as coordenadas e pesos dos pontos de quadratura correspondem a:

$$\eta_{1} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$
 $\Psi_{1} = \frac{5}{9}$

$$\eta_{2} = 0$$
 $\Psi_{2} = \frac{8}{9}$

$$\eta_{3} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$
 $\Psi_{3} = \frac{5}{9}$
(A3.3)

PARA MÉTODO DE GALERKIN

Aplicando a função peso igual à função base e utilizando as propriedades da função base, chega-se ao seguinte conjunto de integrais:

$$\underline{\underline{M}}_{A,j,j} = \int_{-1}^{0} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\underline{y}}_{j} + (\underline{\underline{y}}_{j} - \underline{\underline{y}}_{j-1}) \theta \right) (1 + \theta) d\theta, \quad 1 \leq j \leq N_{K}$$

$$\underline{\underline{M}}_{A,j+1,j} = \int_{0}^{1} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\underline{y}}_{j} + (\underline{\underline{y}}_{j+1} - \underline{\underline{y}}_{j}) \theta \right) (1 - \theta) d\theta, \quad 0 \leq j \leq N_{K} - 1$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,j,j} = \int_{-1}^{0} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\underline{y}}_{j} + (\underline{\underline{y}}_{j} - \underline{\underline{y}}_{j-1}) \theta \right) (1 + \theta) d\theta, \quad 1 \leq j \leq N_{K}$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,j+1,j} = \int_{0}^{1} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{\underline{y}}_{j} + (\underline{\underline{y}}_{j+1} - \underline{\underline{y}}_{j}) \theta \right) (1 - \theta) d\theta, \quad 0 \leq j \leq N_{K} - 1$$
(A3.4)

Aplicando (A3.2) na definição das matrizes de coeficientes $\underline{M}_{A,j,j}$, $\underline{M}_{A,j+1,j}$, $\underline{M}_{B,j,j}$ e $\underline{M}_{B,j+1,j}$, tem-se:

$$\underline{\underline{M}}_{A,j,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} (1 + \eta_{l}) \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{y}_{j} + \left(\underline{y}_{j} - \underline{y}_{j-1}\right) \theta_{l}\right)$$

$$\underline{\underline{M}}_{A,j+1,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} (1 - \eta_{l}) \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{y}_{j+1} + \left(\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_{j}\right) \theta_{l}\right)$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,j,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} (1 + \eta_{l}) \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{y}_{j} + \left(\underline{y}_{j} - \underline{y}_{j-1}\right) \theta_{l}\right)$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,j+1,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} (1 - \eta_{l}) \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{y}_{j+1} + \left(\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_{j}\right) \theta_{l}\right)$$
(A3.5)

onde
$$\theta_{l} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta_{l}$$
.

PARA MÉTODO DE PETROV-GALERKIN

Aplicando as propriedades da função base, chega-se ao seguinte conjunto de integrais:

$$\underline{\underline{M}}_{A,j,j}^{*} = \int_{-1}^{0} \underline{\underline{M}}_{A} (\underline{y}_{j} + (\underline{y}_{j} - \underline{y}_{j-1})\theta) d\theta, \quad 1 \leq j \leq N_{K}$$

$$\underline{\underline{M}}_{A,j+1,j}^{*} = \int_{0}^{1} \underline{\underline{M}}_{A} (\underline{y}_{j} + (\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_{j})\theta) d\theta, \quad 0 \leq j \leq N_{K} - 1$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,j,j}^{*} = \int_{-1}^{0} \underline{\underline{M}}_{B} (\underline{y}_{j} + (\underline{y}_{j} - \underline{y}_{j-1})\theta) d\theta, \quad 1 \leq j \leq N_{K}$$

$$\underline{\underline{M}}_{B,j+1,j}^{*} = \int_{0}^{1} \underline{\underline{M}}_{B} (\underline{y}_{j} + (\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_{j})\theta) d\theta, \quad 0 \leq j \leq N_{K} - 1$$
(A3.6)

Aplicando (A3.2) na definição das matrizes de coeficientes, tem-se:

$$\underline{\underline{M}}^{*}_{A,j,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{y}_{j} + \left(\underline{y}_{j} - \underline{y}_{j-1}\right) \theta_{l}\right)$$

$$\underline{\underline{M}}^{*}_{A,j+1,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{y}_{j+1} + \left(\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_{j}\right) \theta_{l}\right)$$

$$\underline{\underline{M}}^{*}_{B,j,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{y}_{j} + \left(\underline{y}_{j} - \underline{y}_{j-1}\right) \theta_{l}\right)$$

$$\underline{\underline{M}}^{*}_{B,j+1,j} = \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{l=1}^{n} \psi_{l} \underline{\underline{M}}_{B} \left(\underline{y}_{j+1} + \left(\underline{y}_{j+1} - \underline{y}_{j}\right) \theta_{l}\right)$$
(A3.7)

onde
$$\theta_{l} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta_{l}$$
.

.

APÊNDICE IV – PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES BASE E PESO PARA MÉTODO DE *GALERKIN*

Propriedades da integração da função base:

$$\int_{\{i\}} \phi_{j}(x) dx = \begin{cases} 0, & i-j < 0 \\ 0, & i-j > 1 \end{cases} \\
\frac{h_{i}}{2}, & i-j = 1 \\
\frac{h_{i}}{2}, & i-j = 0 \end{cases}$$
(A4.1)

Propriedades da integração da função base multiplicada pela função peso:

$$\int_{\{i\}} \phi_{k}(x) \phi_{j}(x) dx = \begin{cases}
0, & i-k > 1, \forall j \\
0, & i-k < 0, \forall j \\
0, & i-j > 1, \forall k \\
0, & i-j < 0, \forall k
\end{cases}$$

$$\frac{h_{i}}{3}, \quad k = i, j = i$$

$$\frac{h_{i}}{6}, \quad k = i-1, j = i$$

$$\frac{h_{i}}{6}, \quad k = i, j = i-1$$

$$\frac{h_{i}}{6}, \quad k = i, j = i-1$$

$$\frac{h_{i}}{3}, \quad k = i-1, j = i-1$$

Propriedades da integração do produto entre um operador \underline{M}_A , a derivada da função base e a função peso:

$$\int_{\{i\}} \underline{\underline{M}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \frac{d\phi_{k}(x)}{dx} \phi_{j}(x) dx = \begin{cases}
0, & i-k > 1, \forall j \\
0, & i-k < 0, \forall j \\
0, & i-j > 1, \forall k \\
0, & i-j < 0, \forall k
\end{cases}$$

$$\int_{\{i\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i, j = i$$

$$\int_{\{i\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i, j = i - 1$$

$$-\int_{\{i\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i - 1, j = i$$

$$-\int_{\{i\}} \underline{\underline{\underline{M}}}_{A} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i - 1, j = i - 1$$

$$(A4.3)$$

Propriedades da integração do produto entre um operador $\underline{M_B}$, a derivada da função base e a função peso:

$$\int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \frac{d\phi_{k}(x)}{dx} \phi_{j}(x) = \begin{cases}
0, & i-k > 1, \forall j \\
0, & i-k < 0, \forall j \\
0, & i-j > 1, \forall k \\
0, & i-j < 0, \forall k
\end{cases}$$

$$\int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i, j = i$$

$$\int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i, j = i - 1$$

$$-\int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i - 1, j = i$$

$$-\int_{\{i\}} \underline{M}_{B} \left(\underline{\tilde{y}}^{(i)} \right) \phi_{j}(\theta) d\theta, \quad k = i - 1, j = i - 1$$

APÊNDICE V – MODELO ESTACIONÁRIO ESTRATIFICADO DE TAITEL E DUKLER (1976)

INTRODUÇÃO

O modelo bifásico estacionário descrito por Taitel e Dukler (1976) é utilizado nessa tese para a determinação da fração de área de gás em regime estratificado. Essa informação é de grande importância na metodologia de identificação do padrão de escoamento por se tratar de uma variável chave para determinação da transição entre o regime estratificado e os demais regimes de escoamento. Nesse apêndice é feita uma breve descrição do equacionamento e do algoritmo para determinação dessas variáveis.

Seja um geometria para escoamento de gás e líquido sob regime estratificado estacionário em um duto cilíndrico inclinado. Admite-se que cada fase escoa com perfil de velocidade aproximadamente uniforme e constante.

RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Diâmetros hidráulicos equivalentes de cada fase no escoamento são definidos em (A5.1) e (A5.2) conforme apresentado em Taitel e Dukler (1976):

$$D_{h,L} = \frac{4A_L}{K_I} \tag{A5.1}$$

$$D_{h,G} = \frac{4A_G}{K_G + K_I} \tag{A5.2}$$

Fórmulas acerca da geometria do escoamento são colocadas em termos da altura de líquido (h_L) no duto, relacionada, por sua vez, ao ângulo central β referente ao semi-setor de molhamento:

$$\frac{h_L}{D} = \frac{1 - \cos\left(\beta\right)}{2} \tag{A5.3}$$

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{2h_L}{D}\right) \tag{A5.4}$$

Perímetros e áreas de seções de escoamento são, assim, expressos mediante as fórmulas seguintes:

$$K_L = D \cdot \beta = D \cdot \arccos\left(1 - \frac{2h_L}{D}\right)$$
 (A5.5)

$$K_G = D \cdot (\pi - \beta) = D \cdot \left(\pi - \arccos\left(1 - \frac{2h_L}{D}\right)\right)$$
 (A5.6)

$$K_I = 2D\sqrt{\frac{h_L}{D}\left(1 - \frac{h_L}{D}\right)} \tag{A5.7}$$

$$A_{L} = \frac{D^{2}}{4} \left(\operatorname{arcos} \left(1 - \frac{2h_{L}}{D} \right) - 2 \left(1 - \frac{2h_{L}}{D} \right) \sqrt{\frac{h_{L}}{D} \left(1 - \frac{h_{L}}{D} \right)} \right)$$
(A5.8)

$$A_{G} = \frac{D^{2}}{4} \left(\pi - \arccos\left(1 - \frac{2h_{L}}{D}\right) + 2\left(1 - \frac{2h_{L}}{D}\right) \sqrt{\frac{h_{L}}{D}\left(1 - \frac{h_{L}}{D}\right)} \right)$$
(A5.9)

$$\frac{dA_L}{dh_L} = 2D\sqrt{\frac{h_L}{D}\left(1 - \frac{h_L}{D}\right)} \tag{A5.10}$$

Adimensionalizações das grandezas geométricas referentes a comprimentos e a áreas são obtidas dividindo-se, respectivamente, por D e por D^2 . Têm-se:

$$\tilde{h}_L = \frac{h_L}{D} \tag{A5.11}$$

$$\beta = \arccos\left(1 - 2\tilde{h}_L\right) \tag{A5.12}$$

$$\tilde{K}_L = \arccos\left(1 - 2\tilde{h}_L\right) \tag{A5.13}$$

$$\tilde{K}_G = \pi - \arccos\left(1 - 2\tilde{h}_L\right) \tag{A5.14}$$

$$\tilde{K}_{I} = 2\sqrt{\tilde{h}_{L}(1-\tilde{h}_{L})} \tag{A5.15}$$

$$\tilde{A}_{L} = \frac{1}{4} \left(\arccos\left(1 - 2\tilde{h}_{L}\right) - 2\left(1 - 2\tilde{h}_{L}\right) \sqrt{\tilde{h}_{L}\left(1 - \tilde{h}_{L}\right)} \right) \tag{A5.16}$$

$$\tilde{A}_{G} = \frac{1}{4} \left(\pi - \arccos\left(1 - 2\tilde{h}_{L}\right) + 2\left(1 - 2\tilde{h}_{L}\right) \sqrt{\tilde{h}_{L}\left(1 - \tilde{h}_{L}\right)} \right) \tag{A5.17}$$

$$\frac{d\tilde{A}_L}{d\tilde{h}} = 2\sqrt{\tilde{h}_L(1-\tilde{h}_L)} \tag{A5.18}$$

$$\tilde{D}_{h,L} = \frac{4\tilde{A}_L}{\tilde{K}_L} \tag{A5.19}$$

$$\tilde{D}_{h,G} = \frac{4\tilde{A}_G}{\tilde{K}_G + \tilde{K}_I} \tag{A5.20}$$

A fração da seção de escoamento ocupada pela fase gás α_G , é dada, em termos de \tilde{h}_L , pelas equações a seguir:

$$\alpha_G = \frac{4\tilde{A}_G}{\pi} \tag{A5.21}$$

$$\alpha_G\left(\tilde{h}_L\right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \arccos\left(1 - 2\tilde{h}_L\right) + 2\left(1 - 2\tilde{h}_L\right)\sqrt{\tilde{h}_L\left(1 - \tilde{h}_L\right)}\right) \tag{A5.22}$$

Nos casos em que a fração de gás α_G é a variável independente, (A5.22) deve ser invertida numericamente para \tilde{h}_L de modo que as outras variáveis geométricas possam ser determinadas, já que todas são dependentes de \tilde{h}_L .

As velocidades superficiais $v_{L,S}$ e $v_{G,S}$, dadas em (A5.23) e (A5.24), respectivamente, são úteis como valores de referência e de caracterização do escoamento. As velocidades superficiais de líquido $v_{L,S}$ e de gás $v_{G,S}$ correspondem, respectivamente, às velocidades que seriam desenvolvidas em perfil uniforme nos casos em que a linha transporta:

- a) Apenas a mesma vazão mássica de líquido do processo original e nenhum gás; e
- b) apenas a mesma vazão mássica de gás do processo original e nenhum líquido.

Assim têm-se:

$$v_{L,S} = \alpha_L v_L \tag{A5.23}$$

$$v_{GS} = \alpha_G v_G \tag{A5.24}$$

Adimensionalizações de velocidades (\tilde{v}_L e \tilde{v}_G) são obtidas via velocidades superficiais de cada fase conforme (A5.25) e (A5.26).

$$\tilde{v}_L = \frac{v_L}{v_{L,S}} = \frac{A}{A_L} = \frac{\pi}{4\tilde{A}_L}$$
 (A5.25)

$$\tilde{v}_G = \frac{v_G}{v_{G,S}} = \frac{A}{A_G} = \frac{\pi}{4\tilde{A}_G}$$
 (A5.26)

BALANÇOS DE MOMENTO EM CADA FASE

Considere-se uma seção de duto com comprimento Δx estendendo-se de x a $x + \Delta x$, sendo x estabelecida axialmente a favor do escoamento. Admite-se que cada fase escoa com perfil uniforme de velocidade, sendo v_L e v_G as velocidades respectivas de fases líquido e gás. Nestas condições os balanços estacionários de momento em fases líquido e gás, fornecem, respectivamente:

$$P(x)A_L + A_L \Delta x \rho_L g \operatorname{sen}(\theta) + K_I \Delta x \tau_I = P(x + \Delta x) A_L + K_L \Delta x \tau_L$$
 (A5.27)

$$P(x) A_G + A_G \Delta x \rho_G g \operatorname{sen}(\theta) = P(x + \Delta x) A_L + K_G \Delta x \tau_G + K_I \Delta x \tau_I$$
 (A5.28)

Divisão destas equações por Δx , sob $\Delta x \rightarrow 0$, produz, respectivamente:

$$\frac{dP}{dx} = \rho_L g \operatorname{sen}(\theta) + \frac{K_I}{A_L} \tau_I - \frac{K_L}{A_L} \tau_L$$
(A5.29)

$$\frac{dP}{dx} = \rho_G g \operatorname{sen}(\theta) - \frac{K_I}{A_G} \tau_I - \frac{K_G}{A_G} \tau_G$$
(A5.30)

Admitindo-se que é desprezível o gradiente de pressão vertical em uma mesma seção de escoamento – i.e. fases com idêntica pressão no mesmo valor de x – e igualando-se os lados direitos de (A5.29) e (A5.30), chega-se a:

$$\rho_L g \operatorname{sen}(\theta) + \frac{S_I}{A_L} \tau_I - \frac{S_L}{A_L} \tau_L = \rho_G g \operatorname{sen}(\theta) - \frac{S_I}{A_G} \tau_I - \frac{S_G}{A_G} \tau_G$$
(A5.31)

$$\frac{S_G}{A_G} \tau_G - \frac{S_L}{A_L} \tau_L + \left(\frac{S_I}{A_L} + \frac{S_I}{A_G}\right) \tau_I + (\rho_L - \rho_G) g \operatorname{sen}(\theta) = 0$$
(A5.32)

Essas identidades são válidas para escoamento estratificado em duto horizontal ou inclinado em regime estacionário. As tensões cisalhantes são escritas em Taitel e Dukler (1976) através de fórmulas empíricas, via fatores de atrito pertinentes, de acordo com:

$$\tau_L = f_L \rho_L \frac{v_L^2}{2} \tag{A5.33}$$

$$\tau_G = f_G \rho_G \frac{v_G^2}{2} \tag{A5.34}$$

$$\tau_I = f_I \rho_G \frac{(v_G - v_L)^2}{2}$$
 (A5.35)

Sendo os fatores de atrito também empiricamente relacionados a potências da velocidade de cada fase de acordo com (Taitel e Dukler, 1976):

$$f_L = C_L \left(\frac{D_{h,L} v_L \rho_L}{\mu_L}\right)^{-n} \tag{A5.36}$$

$$f_G = C_G \left(\frac{D_{h,G} v_G \rho_G}{\mu_G}\right)^{-m} \tag{A5.37}$$

$$f_I \cong f_G \tag{A5.38}$$

As constantes de (A5.36) e (A5.37) são dadas pelos valores na Tabela A5.1 de acordo com as condições do escoamento.

Tabela A5.1.	Constantes par	a expressões de	fatores de atrito	em escoamento bifásico

Escoamento	C_G	C_L	m	n
Laminar	16	16	1.0	1.0
Turbulento	0.046	0.046	0.2	0.2

A substituição de (A5.33), (A5.34), (A5.35), (A5.36), (A5.37) e (A5.38) em (A5.32) permite obter:

$$\frac{K_{G}}{A_{G}} C_{G} \left(\frac{D_{h,G} v_{G} \rho_{G}}{\mu_{G}} \right)^{-m} \left(\rho_{G} \frac{U_{G}^{2}}{2} \right) - \frac{S_{L}}{A_{L}} C_{L} \left(\frac{D_{h,L} v_{L} \rho_{L}}{\mu_{L}} \right)^{-n} \left(\rho_{L} \frac{v_{L}^{2}}{2} \right) + \left(\frac{K_{I}}{A_{L}} + \frac{K_{I}}{A_{G}} \right) C_{G} \left(\frac{D_{h,G} v_{G} \rho_{G}}{\mu_{G}} \right)^{-m} \left(\rho_{G} \frac{v_{G}^{2}}{2} \right) + (\rho_{L} - \rho_{G}) g sen(\theta) = 0$$
(A5.39)

Definindo-se o gradiente de pressão considerando o escoamento apenas de líquido na mesma vazão mássica do problema em um duto horizontal como sendo:

$$\frac{dP}{dx}\Big|_{L} = C_{L} \left(\frac{D v_{L,S} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-n} \left(\rho_{L} \frac{\left(v_{L,S}\right)^{2}}{2}\right) \frac{4}{D} \tag{A5.40}$$

E definindo-se o gradiente de pressão considerando o escoamento apenas de gás na mesma vazão mássica do problema em um duto horizontal como sendo:

$$\frac{dP}{dx}\Big|_{G} = C_{G} \left(\frac{D v_{G,S} \rho_{G}}{\mu_{G}}\right)^{-m} \left(\rho_{G} \frac{\left(v_{G,S}\right)^{2}}{2}\right) \frac{4}{D} \tag{A5.41}$$

Aplicando-se (A5.40) e (A5.41), (A5.32) admite a seguinte colocação:

$$\frac{K_{G}}{A_{G}} \frac{dP}{dx} \bigg|_{G} \cdot \frac{C_{G} \left(\frac{D_{h,G} v_{G} \rho_{G}}{\mu_{G}}\right)^{-m} \left(\rho_{G} \frac{v_{G}^{2}}{2}\right)}{C_{G} \left(\frac{D v_{G,S} \rho_{G}}{\mu_{G}}\right)^{-m} \left(\rho_{G} \frac{\left(v_{G,S}\right)^{2}}{2}\right) \frac{4}{D}} + \frac{C_{L} \left(\frac{D_{h,L} v_{L} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-m} \left(\rho_{L} \frac{v_{L}^{2}}{2}\right)}{C_{L} \left(\frac{D v_{L,S} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-n} \left(\rho_{L} \frac{v_{L}^{2}}{2}\right)} + \frac{C_{L} \left(\frac{D v_{L,S} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-m} \left(\rho_{L} \frac{\left(v_{L,S}\right)^{2}}{2}\right) \frac{4}{D}}{C_{L} \left(\frac{E_{L} v_{L} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-m} \left(\rho_{L} \frac{v_{L}^{2}}{2}\right)} + \frac{C_{L} \left(\frac{D v_{L,S} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-m} \left(\rho_{L} \frac{v_{L}^{2}}{2}\right)}{C_{L} \left(\frac{D v_{L,S} \rho_{L}}{\mu_{L}}\right)^{-m} \left(\rho_{L} \frac{v_{L}^{2}}{2}\right)} + (\rho_{L} - \rho_{G}) \cdot g \cdot sen \theta = 0$$

$$C_{G} \left(\frac{D v_{G,S} \rho_{G}}{\mu_{G}}\right)^{-m} \left(\rho_{G} \frac{\left(v_{G,S}\right)^{2}}{2}\right) \frac{4}{D} + (\rho_{L} - \rho_{G}) \cdot g \cdot sen \theta = 0$$

EQUAÇÃO TAITEL-DUKLER

(A5.42) pode ser re-escrita, após divisão por (A5.41), como:

$$\frac{D.K_{G}}{4A_{G}} \left(\tilde{D}_{G}\tilde{v}_{G}\right)^{-m} \left(\tilde{U}_{G}\right)^{2} - \frac{D.K_{L}}{4A_{L}} \left(\tilde{D}_{L}\tilde{v}_{L}\right)^{-n} \left(\tilde{v}_{L}\right)^{2} \frac{\frac{dP}{dx}\Big|_{L}}{\frac{dP}{dx}\Big|_{G}} + \left(\frac{D.K_{I}}{4A_{L}} + \frac{D.K_{I}}{4A_{G}}\right) \left(\tilde{D}_{G}\tilde{v}_{G}\right)^{-m} \left(\tilde{v}_{G}\right)^{2} + \frac{(\rho_{L} - \rho_{G}) g \operatorname{sen}(\theta)}{\frac{dP}{dx}\Big|_{G}} = 0$$
(A5.43)

Ou ainda,

$$\left(\frac{D.(K_G + K_I)}{4A_G} + \frac{D.K_I}{4A_L}\right) \left(\tilde{D}_G \tilde{v}_G\right)^{-m} \left(\tilde{v}_G\right)^2 + \frac{(\rho_L - \rho_G) g \operatorname{sen}(\theta)}{\frac{dP}{dx}\Big|_G} + \frac{D.K_L}{4A_L} \left(\tilde{D}_L \tilde{v}_L\right)^{-n} \left(\tilde{v}_L\right)^2 \frac{\frac{dP}{dx}\Big|_L}{\frac{dP}{dx}\Big|_G} = 0$$
(A5.44)

Utilizando-se as identidades geométricas apresentadas anteriormente e definindo-se os seguintes termos adimensionais:

$$Y = \frac{(\rho_L - \rho_G) g \operatorname{sen}(\theta)}{\frac{dP}{dx}\Big|_G} \Rightarrow Y = \frac{(\rho_L - \rho_G) g \operatorname{sen}(\theta)}{C_G \left(\frac{D v_{G,S}}{v_G}\right)^{-m} \frac{\rho_G \left(v_{G,S}\right)^2}{2} \frac{4}{D}}$$
(A5.45)

$$X^{2} = \frac{\frac{dP}{dx}\Big|_{L}}{\frac{dP}{dx}\Big|_{G}} \qquad \Rightarrow X^{2} = \frac{\frac{4C_{L}}{D}\left(\frac{Dv_{L,S}}{v_{L}}\right)^{-n}\frac{\rho_{L}\left(v_{L,S}\right)^{2}}{2}}{\frac{4C_{G}}{D}\left(\frac{Dv_{G,S}}{v_{G}}\right)^{-m}\frac{\rho_{G}\left(v_{G,S}\right)^{2}}{2}}$$
(A5.46)

(A5.44) torna-se:

$$\left(\frac{\tilde{K}_{G}}{\tilde{A}_{G}} + \frac{\tilde{K}_{I}}{\tilde{A}_{G}} + \frac{\tilde{K}_{I}}{\tilde{A}_{I}}\right) \cdot \left(\tilde{D}_{G}\tilde{v}_{G}\right)^{-m} \left(\tilde{v}_{G}\right)^{2} + 4Y - \frac{\tilde{K}_{L}}{\tilde{A}_{I}} \cdot \left(\tilde{D}_{L}\tilde{v}_{L}\right)^{-n} \left(\tilde{v}_{L}\right)^{2} \cdot X^{2} = 0$$
(A5.47)

sendo \tilde{A}_L , \tilde{A}_G , \tilde{K}_L , \tilde{K}_G funções apenas de \tilde{h} conforme descrito anteriormente.

(A5.47) – Eq. Taitel-Dukler para escoamento bifásico estratificado estacionário – pode ser representada de forma condensada e adimensional através da versão abaixo:

$$\Phi(\tilde{h}) + 4Y - \Lambda(\tilde{h}) \cdot X^2 = 0 \tag{A5.48}$$

sendo:

$$\Phi(\tilde{h}) = \left(\frac{\tilde{K}_G}{\tilde{A}_G} + \frac{\tilde{K}_I}{\tilde{A}_G} + \frac{\tilde{K}_I}{\tilde{A}_L}\right) \cdot \left(\tilde{D}_G \tilde{v}_G\right)^{-m} \left(\tilde{v}_G\right)^2$$
(A5.49)

$$\Lambda(\tilde{h}) = \frac{\tilde{K}_L}{\tilde{A}_L} \cdot \left(\tilde{D}_L \tilde{v}_L\right)^{-n} \left(\tilde{v}_L\right)^2 \tag{A5.50}$$

$$Y = K_Y \cdot (v_{G,S})^{m-2}$$
 (A5.51)

$$K_{Y} = \left(\frac{\rho_{L} - \rho_{G}}{\rho_{G}}\right) \left(\frac{D g sen(\theta)}{2C_{G}}\right) \left(\frac{v_{G}}{D}\right)^{-m}$$
(A5.52)

$$X^{2} = K_{X} \cdot \left(\frac{\left(v_{L,S}\right)^{2-n}}{\left(v_{G,S}\right)^{2-m}} \right)$$
 (A5.53)

$$K_X = \left(\frac{C_L}{C_G}\right) \cdot \left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right) \cdot \left(\frac{\mu_L^n}{\mu_G^m} \frac{\rho_G^m}{\rho_L^n}\right) \cdot D^{m-n}$$
(A5.54)

Em um problema típico, (A5.48) tem 3 variáveis: \tilde{h} , $v_{L,S}$ e $v_{G,S}$. Um algoritmo possível para sua resolução demanda o fornecimento de 2 destas variáveis, como o seguinte:

- Entrar com \tilde{h} , $v_{G,S}$;
- Calcular *Y* com (A5.51) e (A5.52);
- Calcular $\Phi(\tilde{h})$, $\Lambda(\tilde{h})$ com (A5.49) e (A5.50);
- Calcular X^2 com (A5.48);
- Calcular $v_{L,S}$ com (A5.53).

APÊNDICE VI - MODELO ESTACIONÁRIO ANULAR DE POTS (1985)

O modelo bifásico estacionário descrito por Pots (1985) corresponde a uma modificação sutil no modelo desenvolvido por Taitel e Dukler (1976) de modo a atender a geometria de escoamento anular.

O mesmo algoritmo descrito detalhadamente no Apêndice V – Modelo Estacionário Estratificado de Taitel e Dukler (1976) é válido fazendo apenas a substituição das fórmulas relacionadas à geometria do escoamento:

Os perímetros de contato dados pelas equações (A5.5), (A5.6) e (A5.7) devem ser substituídos pelas equações (A6.1), (A6.2) e (A6.3).

$$K_L = \pi D \tag{A6.1}$$

$$K_G = 0 (A6.2)$$

$$K_I = \pi D - 2\pi h_L \tag{A6.3}$$

As áreas de ocupação das fases dadas pelas equações (A5.8), (A5.9) e (A5.10) devem ser substituídas pelas equações (A6.4), (A6.5) e (A6.6).

$$A_L = \pi h_L D - \pi h_L^2 \tag{A6.4}$$

$$A_{G} = \pi \frac{D^{2}}{4} - \pi h_{L} D + \pi h_{L}^{2}$$
 (A6.5)

$$\frac{dA_L}{dh} = \pi D - 2\pi h_L \tag{A6.6}$$

Os comprimentos adimensionais (A5.11), (A5.13), (A5.14) e (A5.15) devem ser substituídos pelas equações (A6.7), (A6.8), (A6.9) e (A6.10).

$$\tilde{h} = \frac{h_L}{D} \tag{A6.7}$$

$$\tilde{K}_L = \tilde{h} \tag{A6.8}$$

$$\tilde{K}_G = 0 \tag{A6.9}$$

$$\tilde{K}_I = \pi \left(1 - 2\tilde{h} \right) \tag{A6.10}$$

As áreas adimensionais (A5.16), (A5.17) e (A5.18) devem ser substituídas pelas equações (A6.11), (A6.12) e (A6.13).

$$\tilde{A}_L = \pi \tilde{h} - \pi \tilde{h}^2 \tag{A6.11}$$

$$\tilde{A}_G = \frac{\pi}{4} - \pi \tilde{h} + \pi \tilde{h}^2 \tag{A6.12}$$

$$\frac{d\tilde{A}_L}{d\tilde{h}} = \pi - 2\pi\tilde{h} \tag{A6.13}$$

As equações para cálculo da fração de área de gás (A5.21) e (A5.22) devem ser substituídas por (A6.14) e (A6.15).

$$\alpha_G = \frac{A_G}{\pi D^2 / 4} = \frac{4\tilde{A}_G}{\pi} \tag{A6.14}$$

$$\alpha_G(\tilde{h}) = (1 - 2\tilde{h})^2 \tag{A6.15}$$

APÊNDICE VII - MODELO BEGGS E BRILL (1973)

INTRODUÇÃO

Uma relação de fechamento que permite a determinação da tensão de cisalhamento da mistura τ_M , da densidade da mistura ρ_M e de demais termos necessários para a solução do balanço de momento de mistura (tanto na forma estacionária como dinâmica) composta unicamente por equações fenomenológicas e válida para uma grande faixa de vazões das fases é ainda um tema em aberto principalmente devido à complexidade dos fenômenos de interação e troca de momento entre as fases.

Alguns autores apresentam modelos mecanísticos válidos para condições restritas, mas que levam em consideração certos aspectos fenomenológicos, como por exemplo, Aziz et al. (1972), Taitel e Dukler (1976), Oliemans (1987), Taitel e Barnea (1990) e Hasan e Kabir (1992). Outro grupo de autores desenvolveram correlações bifásicas válidas para diferentes condições baseadas em dados experimentais obtidos através de plantas piloto: Lockhart e Martinelli (1949), Flanigan (1958), Hughmark (1962), Hagedorn e Brown (1965), Eaton et al. (1967), Orkiszewski (1967), Beggs e Brill (1973), Oliemans (1976) e Mukherjee and Brill (1985).

Nessa tese, o modelo Beggs e Brill (1973) é utilizado porque esta é uma das poucas correlações da literatura aberta que é capaz de descrever com precisão apropriada o comportamento do escoamento bifásico para todos os padrões de escoamento e inclinações de tubulações.

A correlação de Beggs e Brill foi desenvolvida a partir de dados experimentais obtidos em uma instalação de teste dotada de seções de tubulações acrílicas de 1 a 1.5 polegadas e 90 pés de comprimento com inclinações ajustáveis. Apesar os valores restritos de diâmetro e de comprimento de tubulação, esta correlação é amplamente utilizada em cálculos preliminares e projeto conceitual, principalmente pela sua fácil representação matemática e por ser válida para todos os padrões de escoamento (distribuído, intermitente, transição e segregado).

As premissas admitidas quando se utiliza o modelo empírico de Beggs e Brill são: (i) fluidos são newtonianos e com viscosidade constante, (ii) ausência de transferência de massa e calor entre as fases e (iii) ausência de reações químicas.

O algoritmo de cálculo dessa correlação requer uma sequência de passos descritos detalhadamente nas seções a seguir.

CÁLCULOS INICIAIS

Os *hold-up's* de não-escorregamento das fases líquida e gás, respectivamente, λ_L e λ_G , equivalentes às frações de área considerando que a velocidade relativa entre as fases é nula, são calculados através de (A7.1) e (A7.2).

$$\lambda_L = \frac{v_{S,L}}{v_M} \tag{A7.1}$$

$$\lambda_G = \frac{v_{S,G}}{v_M} \tag{A7.2}$$

A densidade média da mistura, ρ_n , e a viscosidade média da mistura, μ_n , para não escorregamento são calculadas via (A7.3) e (A7.4), respectivamente.

$$\rho_n = \rho_L \lambda_L + \rho_G \lambda_G \tag{A7.3}$$

$$\mu_n = \mu_L \lambda_L + \mu_G \lambda_G \tag{A7.4}$$

O número de Froude da mistura, Fr_M , o número de velocidade do líquido, N_L , e o número de Reynolds da mistura para não escorregamento, Re_n , são calculados via (A7.5), (A7.6) e (A7.7), respectivamente:

$$Fr_{M} = \frac{v_{M}^{2}}{g D} \tag{A7.5}$$

$$N_L = v_{S,L} \left(\frac{\rho_L}{g\,\sigma}\right)^{1/4} \tag{A7.6}$$

$$Re_n = \frac{\rho_n v_M D}{\mu_n} \tag{A7.7}$$

onde σ é a tensão interfacial (Pa·m) e v_M é a soma das velocidades superficiais $v_{S,L}$ e $v_{S,G}$.

DETERMINAÇÃO DO PADRÃO DE ESCOAMENTO HORIZONTAL

A identificação do padrão de escoamento horizontal requer o cálculo de quatro números limitadores (L_1 , L_2 , L_3 e L_4) que são modelados de acordo com (A7.8), (A7.9), (A7.10) e (A7.11):

$$L_1 = 3.160 \cdot 10^{+2} \lambda_L^{0.3020} \tag{A7.8}$$

$$L_2 = 9.252 \cdot 10^{-4} \lambda_L^{-2.4684} \tag{A7.9}$$

$$L_3 = 1.000 \cdot 10^{-1} \lambda_L^{-1.4516} \tag{A7.10}$$

$$L_4 = 5.000 \cdot 10^{-1} \lambda_L^{-6.7380} \tag{A7.11}$$

Os padrões são obtidos através de testes lógicos conforme mostrado em (A7.12):

$$\begin{cases} \lambda_L < 0.01 & \text{e} & Fr_L < L_1 \implies \text{Segregado} \\ \lambda_L \ge 0.01 & \text{e} & Fr_L < L_2 \implies \text{Segregado} \\ \lambda_L \ge 0.01 & \text{e} & L_2 \le Fr_L \le L_3 \implies \text{Transição} \\ \lambda_L < 0.4 & \text{e} & Fr_L \ge L_1 \implies \text{Distribuído} \\ \lambda_L \ge 0.4 & \text{e} & Fr_L > L_4 \implies \text{Distribuído} \\ \lambda_L \ge 0.4 & \text{e} & L_3 < Fr_L \le L_4 \implies \text{Intermitente} \\ 0.01 \le \lambda_L < 0.4 & \text{e} & L_3 < Fr_L \le L_1 \implies \text{Intermitente} \end{cases}$$

HOLD-UP DE LÍQUIDO PARA LINHA HORIZONTAL

O *hold-up* de líquido para linha horizontal, α_{L0} , nos padrões de escoamento segregado, intermitente e distribuído são determinados através de (A7.13) com coeficientes apresentados na Tabela A7.1.

$$\alpha_{L0} = \max\left(\lambda_L, \frac{a \lambda_L^b}{F r_L^c}\right) \tag{A7.13}$$

	_			
Padrão de Escoamento	а	b	c	-
Segregado	0.980	0.4846	0.0868	-
Intermitente	0.845	0.5351	0.0173	
Distribuído	1.065	0.5824	0.0609	

Tabela A7.1. Coeficientes para cálculo de hold-up

O *hold-up* de líquido para o padrão de transição é obtido por uma interpolação entre os padrões segregado e intermitente como mostrado em (A7.14):

$$\alpha_{L0,Transição} = \phi \cdot \alpha_{L0,Segregado} + (1 - \phi) \cdot \alpha_{L0,Intermitente}$$
(A7.14)

onde ϕ é um fator de peso que tem a seguinte forma: $\phi = (L_3 - Fr_L)/(L_3 - L_2)$.

FATOR DE CORREÇÃO DE INCLINAÇÃO

O fator de correção de inclinação é utilizado para ajustar o valor do *hold-up* horizontal de acordo com a inclinação da tubulação conforme descrito em (A7.15) e segundo os coeficientes da Tabela A7.2.

$$\psi = 1 + C \left(\sin\left(1.8\,\theta\right) - \frac{\sin^3\left(1.8\,\theta\right)}{3} \right) \tag{A7.15}$$

onde $C = \max\left(0, \left(1 - \lambda_L\right) \ln\left(d \lambda_L^e N_L^f F r_L^g\right)\right)$.

Tabela A7.2. Coeficientes para a correção da inclinação

Padrão	Direção	d	e	f	g
Segregado	Ascendente	0.011	-3.768	3.539	-1.614
Intermitente	Ascendente	2.960	0.305	-0.4473	0.0978
Distribuído	Ascendente	Sem correção		$C=0, \psi=1$	
Todos	Descendente	4.700	-0.3692	0.1244	-0.5056

HOLD-UP DE LÍQUIDO

O *hold-up* de líquido para qualquer inclinação e padrão de escoamento é determinado a partir do *hold-up* horizontal e do fator de correção de inclinação para cada padrão de escoamento e apropriadamente ponderado pelas variáveis de identificação fl_i conforme apresentado em (A7.16). A variável de identificação fl_i é definida para identificar a presença

de um determinado regime de escoamento, onde zero indica que o *i*-ésimo regime não é estável e um indica que o *i*-ésimo regime é estável, onde *i* é igual a 1 para segregado, 2 para distribuído, 3 para intermitente e 4 para transição:

$$\alpha_{L} = (\alpha_{L0} \, \psi)_{1} \, fl_{1} + (\alpha_{L0} \, \psi)_{2} \, fl_{2} + (\alpha_{L0} \, \psi)_{3} \, fl_{3} + (\alpha_{L0} \, \psi)_{4} \, fl_{4}$$
(A7.16)

onde o *hold-up* de líquido para o padrão de transição é uma interpolação dos padrões segregado e intermitente usando o fator de peso ϕ conforme anteriormente:

$$(\alpha_{L_0} \psi)_{A} = \phi (\alpha_{L_0} \psi)_{1} + (1 - \phi) (\alpha_{L_0} \psi)_{3}$$
(A7.17)

DENSIDADE DA MISTURA E TENSÃO DE CISALHAMENTO BIFÁSICO

A tensão de cisalhamento é modelada de acordo com (A7.18) com um fator de atrito bifásico f_{tp} descrito em (A7.19). A densidade da mistura é obtida das densidade das fases e do *hold-up* de líquido conforme detalhado em (A7.20). O expoente S de (A7.19) é modelado de acordo com (A7.21) e (A7.22).

$$\tau_{\scriptscriptstyle M} = f_{\scriptscriptstyle Tp} \rho_{\scriptscriptstyle M} \, \frac{v_{\scriptscriptstyle M} \, |v_{\scriptscriptstyle M}|}{4} \tag{A7.18}$$

$$f_{tp} = f_n e^{S} \tag{A7.19}$$

$$\rho_{M} = \rho_{L} \alpha_{L} + \rho_{G} \left(1 - \alpha_{L} \right) \tag{A7.20}$$

$$S = \begin{cases} \left(-0.0523k^{-1} + 3.1820 - 0.8725k + 0.01853k^{3}\right)^{-1}, \text{ para } k \le 0 \text{ ou } k \ge 0.1823 \\ \ln\left(2.2e^{k} - 1.2\right), \text{ para } 0 < k < 0.1823 \end{cases}$$
(A7.21)

$$k = \ln\left(\frac{\lambda_L}{\alpha_L^2}\right) \tag{A7.22}$$

onde f_n é o fator de de atrito de *Fanning* para não escorregamento entre as fases calculado pela correlação de Churchill (1977).